

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

58e jaargang
1982/1983
no. 10
juni/juli

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: Mw. I. van Breugel - Drs. F. H. Dolmans (hoofdredacteur) -
Dr. F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens -
P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders -
Mw. H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) -
Dr. P. G. J. Vredenduin (penningmeester)

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-23417. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie:
F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-653218. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 45,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 30,–; contributie zonder Euclides *f* 25,–.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen en mededelingen worden in tweevoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894 - 11730. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van 1½. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel: 055-550834.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-2402, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:
Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-162189. Giro: 1308949.
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.
Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:
Intermedia bv, Postbus 371, 2400 AJ Alphen a/d Rijn.
Tel. 01720-62078/62079. Telex 33014.

ISSN 0165-0394

Het aanpassen van examennormen

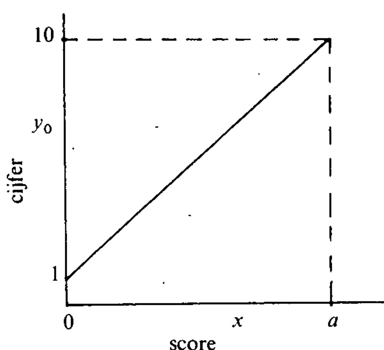
L. A. D. DE BOER

Als de resultaten van het CSE tegenvallen, worden de cijfers verhoogd. Het zijn louter statistische kriteria die bepalen wanneer dat dient te gebeuren. Er wordt voorbijgegaan aan de vraag of de opgaven te moeilijk waren, dan wel de leerlingen te dom. Dat is op zich al bedenkelijk. Dat het ophogen zelf op onrechtvaardige wijze geschiedt – zoals blijkt uit onderstaand artikel – is ronduit absurd, temeer daar er goede alternatieven zijn.

Bij een zekere overhoring zijn a punten te verdienen. Heeft een leerling 0 punten behaald, dan krijgt deze leerling een 1; bij a punten wordt een 10 gegeven; de tussenliggende scores (x) worden in het algemeen naar evenredigheid gewaardeerd, zodat het cijfer (y_0) als volgt wordt verkregen:

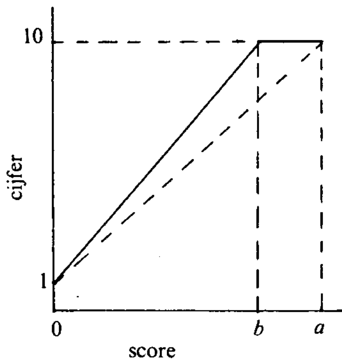
$$y_0 = 1 + \frac{9}{a}x \text{ (afgezien van eventuele afronding).}$$

Grafisch:

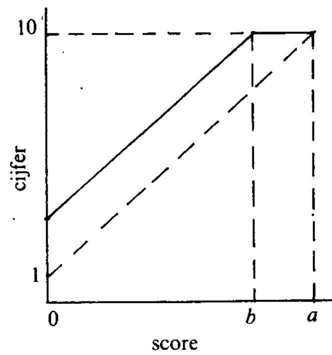


Figuur 1

Is de overhoring slecht gemaakt, en is dat niet uitsluitend te wijten aan de leerling, dan heeft de docent wel eens de neiging om 'de norm aan te passen'. Men kan in zo'n geval een score b ($b < a$) bepalen en stellen dat iemand die b punten behaalde een 10 moet krijgen.
Vervolgens kan men op twee wezenlijk verschillende manieren te werk gaan:



Figuur 2



Figuur 3

1 $y_1 = 1 + \frac{9}{b}x$ als $x \leqq b$

$y_1 = 10$ als $x > b$

Vooral wanneer de voor de overhoring beschikbare tijd minder was de benodigde, lijkt dit een rechtvaardige methode (figuur 2).

2 $y_2 = 1 + \frac{9}{a}(x + a - b)$ als $x \leqq b$

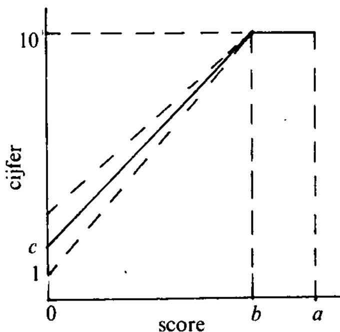
$y_2 = 10$ als $x > b$

Wanneer alle vragen te moeilijk waren of foutief gesteld, kan dit rechtvaardig zijn: vrijwel iedereen krijgt eenzelfde aantal punten kado (figuur 3).
In de praktijk zal aan een gemiddelde van deze uitersten de voorkeur worden gegeven. Het rekenkundig gemiddelde is één mogelijkheid.
Algemener:

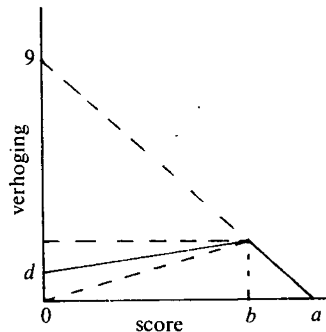
$$y = c + \frac{10 - c}{b}x \quad \text{als } x \leqq b$$

$$y = 10 \quad \text{als } x > b$$

waarin $1 \leqq c \leqq 1 + \frac{9(a-b)}{a}$ (figuur 4).



Figuur 4



Figuur 5

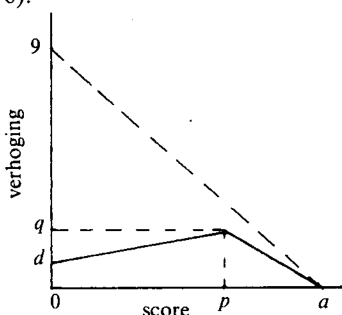
In elk der bovenstaande gevallen is het in het begin genoemde cijfer y_0, verhoogd met een getal v:

$$v = y - y_0$$

Deze verhoging v is afhankelijk van x. In bovenstaande figuur is de betrekking tussen x en v weergegeven.
Hierin is $d = c - 1$, dus

$$0 \leqq d \leqq \frac{9(a - b)}{a}.$$

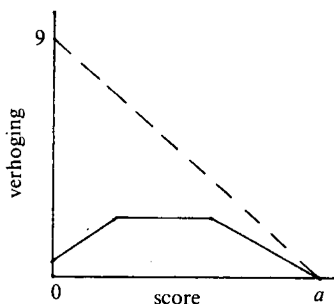
Merk op dat $v \leqq 9 - \frac{9}{a}x$ (want $y \leqq 10$), dus aan de rechter kant zal v moeten afnemen bij toenemende score (figuur 5).
Wil men afhankelijk van de situatie, aan elke score die kleiner is dan a, minder dan een 10 toekennen, dan zal de grafiek aan de rechterkant onder de stippellijn moeten liggen (figuur 6).



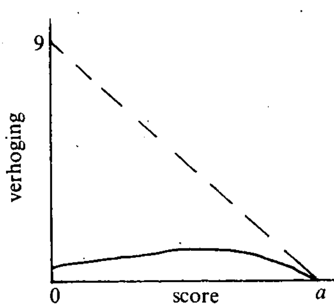
Figuur 6

Samenvattend: voor het aanpassen van een norm dienen, op grond van de oorzaken van de lage cijfers, drie getallen te worden bepaald:
de verhoging d die bij score 0 wordt toegekend,
de score p waarbij de verhoging maximaal is, en
de maximale verhoging q ($d \leqq q \leqq 9 - \frac{9}{a} \cdot p$).

Alle tot dusverre beschouwde grafieken hebben een 'knik', het zijn gebroken rechten. Natuurlijk zijn er andere mogelijkheden (figuur 7, 8).

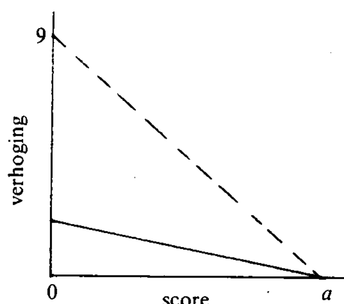


Figuur 7



Figuur 8

Deze zijn lastiger te hanteren dan de vorige, maar niet principiëel verschillend: ook hier vindt men een stijgende functie voor kleine scores, een dalende voor hoge. Dit laatste lijkt inherent aan het systeem van het ophogen.
Is dat ook echt zo?
In theorie zou men een rechte lijn, zonder knik, als uitgangspunt kunnen nemen (figuur 9).



Figuur 9

Wat zou dat betekenen?

Juist, dat is het laatste wat men kan wensen, namelijk dat leerlingen die niets presteren meer punten kado krijgen dan leerlingen die er wel wat van terecht brengen. Principieel onjuist dus.[1])
Nu, uitgerekend deze laatste methode hebben onze geleerde overheden uitverkoren voor het bepalen van (sommige?) eindexamen-uitslagen!
Bij de laatste VWO-examens wiskunde, eerste tijdvakken van 1981 en 1982, werd het cijfer van de domme verhoogd met 1,3 respectievelijk 0,6 en nam deze beloning evenredig af naarmate de leerling meer inzicht vertoonde.[2])
Welke filosofie mag hieraan ten grondslag liggen?
Zou een grafiek met een knik het bevattingsvermogen van de Cito-computers te boven gaan, of spelen esthetische overwegingen een rol? Rationele gronden zijn er in elk geval niet.
Het nivelleren van inkomens is te verdedigen. Op de genoemde wijze geestelijke vermogens proberen te nivelleren is zeer kwalijk: domheid dan wel luiheid worden vergoelijkt of zelfs gestimuleerd.

Noten

[1]) Althans in de pakketklassen. In de onderbouw kan men om didactische redenen besluiten geen al te lage cijfers te geven.
[2]) Een interessant gevolg van de ophoging van 1981 is, dat een leerling met uitsluitend Havo-kennis 5,2 kon behalen!

Over de auteur:

L. A. D. de Boer is leraar wiskunde aan het Cartesius Lyceum te Amsterdam

De Adviescommissie leerplanontwikkeling Wiskunde en het leerplan voor de middenschool

FRANS DOLMANS

De publicatie in Euclides[1]) van het rapport van de Adviescommissie Leerplanontwikkeling Wiskunde (ACLO-W) op de door de projectgroep OLM van de Stichting Leerplanontwikkeling uitgebrachte brochure 'Middenschool in beeld' biedt mij de gelegenheid op dat advies te reageren.
Het is niet mijn bedoeling hier op allerlei inhoudelijke aspecten van het rapport in te gaan. Ook ga ik voorbij aan de toonzetting.
Twee punten vormen de kern van mijn reactie. Ik ga eerst in op de inhoud van het advies met betrekking tot de controverse 'contexten in wiskundeonderwijs' versus 'themagericht wiskundeonderwijs'. Daarna verwoord ik wat gedachten over het beleid van de ACLO Wiskunde.

Controverse?
In een gedeelte van het nederlandse wiskundeonderwijs hebben de afgelopen jaren buiten-wiskundige onderwerpen hun intrede gedaan. Bij wiskundemateriaal, waarin ook aan buitenwiskundige fenomenen aandacht besteed wordt, worden niet alleen eigenschappen van en relaties tussen min of meer formele objecten zoals getallen, variabelen, functies en figuren bestudeerd, maar vindt er ook een koppeling plaats tussen deze eigenschappen en verschijnselen in de realiteit:
- de grootte van een hoek wordt gekoppeld aan de draai, die een schip maakt;
- een periodieke functie wordt gekoppeld aan de waterhoogte bij een plaats aan de kust;
- machten worden gekoppeld aan grote getallen; de aarde is ongeveer $6 \cdot 10^{24}$ kg.

Leraren, auteurs en leerplanontwikkelaars kunnen allerlei bedoelingen hebben als zij buiten-wiskundige onderwerpen in hun wiskundelessen opnemen. Hier volgen vier mogelijke overwegingen daarbij.
1 Buitenwiskundige verschijnselen hebben invloed op de motivatie van leerlingen bij het wiskundeonderwijs. (Er zijn leerlingen, die verveeld bij 'gewone' goniolessen zitten maar die opeens enthousiast worden als die goniometrie gekoppeld wordt aan landmeetkundige en technische probleempjes.
Er zijn ook leerlingen waarvoor het juist andersom werkt; zij kunnen met veel plezier vergelijkingen zoals $2 \sin x + \cos x = {}^3/_2$ oplossen, maar raken in verwarring als zij een niet-wiskundige situatie voorgelegd krijgen waar zo'n vergelijking uitgehaald kan worden.)

2 Leerlingen hebben, als zij op de middelbare school komen, al vaak veel weet van allerlei verschijnselen die de basis vormen voor wiskundig begrip. Dit intuïtief begrijpen kan gebruikt worden om wiskundige concepten op te bouwen. (Evenwijdigheid komt in allerlei verschijningsvormen voor in de realiteit en de leerling kent die voorbeelden al lang als hij in de brugklas komt. Daarvan kan gebruik gemaakt worden als we evenwijdigheid willen behandelen.)
3 De zin van wiskunde bestaat voor een deel uit het gebruik van die wiskunde in praktische situaties. Het is mede daardoor zinnig om met wiskunde op school bezig te zijn. En het is mogelijk de bruikbaarheid van fragmenten van wiskunde aan leerlingen tijdens wiskundelessen te demonstreren.
4 De bruikbaarheid van wiskundige onderdelen kan één van de factoren zijn die meespelen bij het uitkiezen van wiskunde leerstof. (Leerlingen die dingen aanleren, die zij later waarschijnlijk zullen kunnen gebruiken.)
Er zijn allerlei andere factoren, die een rol kunnen spelen bij het vaststellen van leerstof zoals traditie, wensen van vervolgopleidingen van de leerlingen en opleiding van de leraren. Maar als leerstof mede in verband met de bruikbaarheid ervan in het leerplan staat dan is het denkbaar ook aandacht aan de redenen van die bruikbaarheid in de klas te besteden.

Het idee om buiten-wiskundige verschijnselen in het voortgezet wiskundeonderwijs aan bod te laten komen is niet nieuw. Maar de wiskundeboeken vóór 1968 bevatten vrijwel uitsluitend formele wiskunde of iets wat daar sterk op lijkt. De relatie met niet-wiskundige verschijnselen werd niet genoemd of werd nadrukkelijk in aparte paragrafen opgenomen, soms gedrukt in kleine lettertjes. Vaak zullen leraren in de klas allerlei toevoegingen van buiten de wiskunde aan die boeken gegeven hebben. Maar het zal geen kleinigheid geweest zijn zulke verbanden zelf te leggen.
Het IOWO heeft hier belangrijk baanbrekend werk verricht en bij talloze stukjes wiskunde buitenwiskundige situaties aangedragen.
Parallel aan dit ontwikkelingswerk van het IOWO en in sommige gevallen in navolging ervan, en erdoor geïnspireerd zijn er activiteiten van anderen geweest, die min of meer de zelfde richting zijn opgegaan. Ik vermeld bijvoorbeeld wiskunde schoolmethodes zoals *Passen en Meten*, de 4e druk van *Moderne Wiskunde*, *Zestien min*, het ontwikkelingswerk van de wiskundesectie van de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO), van OW en OC, de activiteiten van Hewet, boeken zoals *Levende Wiskunde* en niet te vergeten allerlei producten van leraren van middelbare scholen en initiële opleidingen.
Deze ontwikkelingen hebben allerlei stukjes onderwijs opgeleverd waarin relaties tussen wiskunde en de realiteit gelegd worden. Je zou over een stroming in het wiskundeonderwijs kunnen spreken.
Natuurlijk zijn er ook allerlei onderlinge inhoudelijke verschillen tussen de genoemde groeperingen. Bijvoorbeeld met betrekking tot hun relatie tot het huidige rijksleerplan. (De vermelde wiskundemethodes werken alle binnen het vigerende rijksleerplan. Hewet heeft via de Hewet-commissie een eigen leerplan voor 5 en 6 VWO ontwikkeld. Het IOWO heeft voor de onderbouw van het middelbaar onderwijs onafhankelijk van het rijksleerplan materiaal gemaakt.)

De activiteiten van de OLM voor zover betrekking hebbend op wiskundeonder-

wijs behoren tot de genoemde stroming, want ook de OLM schenkt aandacht aan buitenwiskundige ervaringen binnen wiskundeonderwijs. Maar doet dat op eigen wijze. De OLM pleit voor een benadering waarbij 'gekozen wordt voor maatschappelijke verschijnselen of problemen waar kinderen mee te maken krijgen in hun leven en waarop ze een antwoord willen of zouden moeten vinden'.[2])
In de ideeën van de OLM is het wiskundige apparaat een hulpmiddel om die problemen te lijf te kunnen. Wiskunde als hulpmiddel, niet als doel op zich.
Het verschil tussen de OLM-benaderingswijze en de aanpak bij bijvoorbeeld het IOWO wordt nu zichtbaar. Het IOWO ontwikkelde wiskundeonderwijs en maakte daarbij gebruik van situaties uit de realiteit. Daarbij is wiskunde doel en de situatiebeschrijvingen middel om dat doel te begrijpen.
Het lijkt interessant om na te gaan of de verschillen zo groot zijn als met de mond (pen) beleden wordt.
IOWO-pakketten zoals 'Zie je wel' en 'Schaduw en diepte' bevatten ook allerlei probleemsituaties, die je als gebruiker (leraar of leerling) ervaart als doel op zich, niet als middel om wiskunde te leren, terwijl de intentie van de auteurs blijkbaar wel het ontwikkelen van wiskunde was.
We denken bijvoorbeeld aan de verklaring van de schijngestalten van de maan op bladzijde 25 van *Schaduw en diepte*[3]) en de vraag 'Hoe echt is een foto?' op bladzijde 44 en 45. En aan de veranderende landschappen vanuit de trein in *Zie je wel*[4]). In de methode *Zestien min*[5]) staan hoofdstukken zoals Energie, Ruimte en Verleden en Toekomst, die bedoeld zijn om te laten zien dat wiskunde gebruikt kan worden bij vragen over onze realiteit. Maar feitelijk functioneren deze hoofdstukken ook als aanleidingen om wiskunde verder te ontwikkelen.

Blijkbaar is de tweedeling, die de ACLO en de OLM beiden(!) noemen toch minder duidelijk dan ze suggereren. Hetgeen onverlet laat dat er verschillen zijn. Het idee om wiskunde te behandelen als hulpmiddel om problemen uit de realiteit op te kunnen lossen gaat een stap verder dan het zoeken van contexten bij wiskundige inhouden. Het zoeken van situaties bij inhouden is een didaktisch middel om die inhouden aan de man te brengen. Terwijl wiskunde naar aanleiding van probleemsituaties uit de realiteit gevolgen zal hebben voor de keuze van wiskunde-leerstof die aan de orde gesteld wordt. In feite staan er volgens deze gedachte geen wiskunde-onderdelen in het leerplan maar niet-wiskundige situaties, die bestudeerd worden. Daar kun je als leerplanontwikkelaar voor kiezen en leerstof selecteren op basis van het vóórkomen ervan bij problemen en oplossingen van die problemen.
De OLM schrijft:
'Het onderwijs in de wiskunde is erop gericht leerlingen een probleemveld te leren analyseren en structureren door het opsporen van allerlei samenhangen tussen grootheden en van allerlei regels en wetmatigheden, door het schematisch, grafisch en/of in formulevorm weergeven van deze verbanden en door het op basis van deze beschrijvingen doen van bepaalde uitspraken en/of voorspellingen.'[6])
De OLM kiest voor wiskunde als hulpmiddel. Dat is een legitieme keuze. De vraag is of het een reële keuze is. Bijvoorbeeld suggereert deze aanpak dat je alle relevante wiskunde zo kunt ontwikkelen.

De OLM schrijft ook:
'Hoe thematisch onderwijs gepland kan worden op een zodanige wijze dat de ontwikkelingslijnen voldoende tot hun recht komen is op dit moment nog een open vraag. In een modelpublicatie zal op deze problematiek nader worden ingegaan'.[7])
Ik interpreteer dat zo, dat de OLM er niet over twijfelt of het mogelijk is zo aan de slag te gaan, maar dat men nog nader wil onderzoeken hoe dit het beste kan gebeuren. Maar de OLM zal in de loop van 1983 ontbonden worden en zal dus niet toekomen aan het uitwerken van eigen ideeën in de vorm van leerlingenmateriaal.
Ik ben pessimistischer dan de OLM over mogelijkheden om wiskunde van uit thema's te ontwikkelen. Het is zonder meer een aantrekkelijke gedachte maar het lijkt haast onontkoombaar om zo nu en dan binnen de wiskunde zelf stapjes te moeten maken. Maar dit vermoeden is thans niet hard te maken. Het is mogelijk dat wij, in onze situatie, nóg niet in staat zijn wiskunde vanuit problemen in de werkelijkheid te ontwikkelen en dat dit een kwestie van tijd, ervaring en geduld is. Wellicht ook is het meer fundamenteel onmogelijk een volledige opbouw van wiskunde vanuit de realiteit te creëren.
Juist hier ligt een interessant en belangrijk onderzoeksterrein. Juist hier is een poging om wiskunde vanuit probleemsituaties te ontwikkelen een uiterst waardevolle bijdrage aan de beantwoording van vragen over mogelijkheden bij wiskundeonderwijs. Juist hier had de OLM de kans moeten krijgen te laten zien hoe wiskundeonderwijs er volgens haar ideeën zou kunnen uit zien.

Beleid van de Adviescommissie leerplanontwikkeling Wiskunde
De adviescommissie leerplanontwikkeling wiskunde zou een beleid kunnen voeren dat gericht is op het stimuleren van grensverleggend onderzoek op het gebied van wiskundeonderwijs. Dit houdt niet in dat iedere wilde gedachte direkt gesteund moet worden. Maar het betekent wel: alert zijn op ontwikkelingen, die mogelijk gemaakt zijn door het werk dat tot nu toe verricht is. Vooral door het IOWO zijn we in een positie terecht gekomen waarin we weten dat het mogelijk is bij allerlei wiskundige fragmenten contexten te vinden. Deze positie geeft de gelegenheid een volgende stap te zetten.
Een mogelijke stap is het kritischer dan tot nu toe selecteren van contexten. Er zijn contexten, die eigenlijk niet meer dan duimzuigerij van auteurs zijn: contexten, die erg onecht overkomen; contexten, die gewoonweg elitair zijn; contexten, die wellicht de motivatie van leerlingen verhogen maar eigenlijk niet door de beugel kunnen als het gaat om zingeving van wiskundeonderwijs; contexten, waarin een loopje genomen wordt met natuurkundige resultaten waardoor leerlingen bij wiskunde onzin leren die ze bij natuurkunde 'op hun boterham' krijgen.
Het IOWO heeft ook in dit opzicht veel voorbeelden van goed materiaal geleverd. Maar het probleem spitst zich toe op de vraag naar goede contexten als je binnen het huidige leerplan moet werken. Vind maar eens goede contexten bij planimetrische stellingen of bij merkwaardige produkten!
Een stap in een andere richting is het ontwikkelen van wiskunde als hulpmiddel bij het oplossen van niet wiskundige problemen. Met als belangrijke vraag welke wiskunde zo ontwikkeld kan worden. (Algebra niet als doel op zich, maar

hooguit als instrument om met andere stukjes wiskunde bezig te kunnen zijn. Toegepaste wiskunde in plaats van zuivere wiskunde op de middelbare school?) De ACLO wiskunde zou oog moeten hebben voor een pluriforme ontwikkeling van het Nederlandse wiskundeonderwijs en zich tolerant moeten opstellen ten opzichte van de diverse stromingen, die daarbinnen te onderscheiden zijn. Oog voor contextloos wiskunde-onderwijs, voor contexten en voor wiskunde in situaties.
Ik begrijp het advies van de ACLO wiskunde niet vanuit het inzicht dat de ideeën van de OLM relatief dicht bij de door de ACLO Wiskunde wél geprezen contextrijke wiskunde liggen. De twee opvattingen zijn niet identiek aan elkaar maar verschillen onderling veel minder dan ze beiden verschillen van de wiskundeonderwijs-stroming, waarin contextloos gewerkt wordt. De nadrukken in het advies van de ACLO hadden ook op overeenkomsten tussen beide stromingen gelegd kunnen worden. Een winkelier noemt z'n concurrent soms ook z'n collega.
Het verschil tussen wiskunde met contexten en wiskunde uit probleemsituaties zal voor veel buitenstaanders erg subtiel zijn. Veroordeling van de ene benaderingswijze zal dan ook de levenskansen van de andere negatief beïnvloeden. Daardoor werkt het advies mogelijk als een boemerang voor het contextrijke ontwikkelingswerk. En dat, terwijl gedachten over contextrijk wiskundeonderwijs allesbehalve gemeengoed geworden zijn. Veel secties zijn na een avontuurtje met contexten alweer terug bij contextloze methoden en dat vaak op grond van andere dan inhoudelijke overwegingen.

Noten

1 H. Freudenthal, *Het Leerplan voor de middenschool*, Euclides 1982-83, nr. 7, bladzijde 248-259.
2 *Middenschool in beeld: Elm*; SLO/pg OLM, Enschede 1981, bladzijde WK-7.
3 *Schaduw en diepte*, Wiskivon, dec. 1980, IOWO.
4 *Zie je wel*, Wiskivon, IOWO.
5 F. H. Dolmans e.a., *Zestien min*, WN 1981, deel 1.
6 zie 2. bladzijde WK-12.
7 zie 2. bladzijde WK-8.

Mededeling van het bestuur

In afwijking van een eerder bericht zal de kaskommissie voor 1982/1983 gevormd worden door de leden A. Braat, Albastdijk 48, 4706 AN Roosendaal en M. J. Verhoef, Lariksstraat 14, 3329 AK Dordrecht.
Wie is bereid volgend jaar in de kaskommissie zitting te nemen? Men wordt verzocht zich op te geven bij de sekretaris.

Regelmatige veelhoeken met rationale hoekpunten. Rationale hoeken met een rationale cosinus

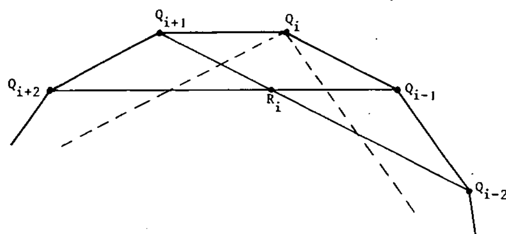
K. POST

Enige tijd geleden bepaalde Hessel Pot in dit tijdschrift ([6]) alle rationale veelvouden van π waarvoor de cosinusfunctie een rationale waarde aanneemt. Uit een later artikel van O. Bottema ([1]) bleek dat Pot's resultaat, zij het met andere methoden, ook reeds gevonden was door Hadwiger ([2]), Hadwiger en Debrunner ([3]), en Tzanakis ([8]). In de bewijzen van Hadwiger werd gebruik gemaakt van een stelling over regelmatige veelhoeken, gevonden door Scherrer ([7]). Bij nadere bestudering van het artikel van Scherrer en de bijdragen van Hadwiger en Debrunner bleek aan ondergetekende, dat Scherrer's resultaat door hem was herontdekt ([4], [5]) en daarbij een variant was geformuleerd, die onmiddellijk tot de stelling van Hadwiger-Debrunner-Tzanakis-Pot leidt.
Omdat de methoden van zuiver elementair meetkundige aard zijn en geen beroep doen op de kennis van complexe getallen, volgt hier een volledige weergave van de gedachtengang die tot de stelling van Hadwiger-Debrunner-Tzanakis-Pot voert. Wellicht is er ook iets uit te gebruiken om aan wiskundig geïnteresseerde VWO-leerlingen in hogere klassen aan te bieden.

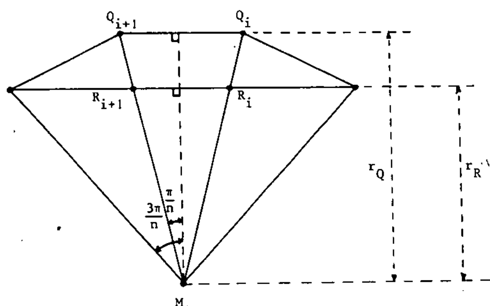
Stelling 1 (de stelling van Scherrer). Laat n een geheel getal zijn ($n \geq 5, n \neq 6$) en laat $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de hoekpunten zijn van een regelmatige n-hoek in het platte vlak V. Dan bestaat er in V *geen* coördinatenstelsel (rechthoekig dan wel scheefhoekig) met de eigenschap dat alle punten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *rationale* coördinaten hebben (een zgn. rationaal aangepast coördinatenstelsel).
Bewijs: Uit het ongerijmde. Neem aan dat er wèl zo'n rationaal aangepast coördinatenstelsel bestaat. Noem de oorsprong van dat stelsel O, en veronderstel dat de coördinaten van de hoekpunten luiden:

$$P_k : \left(\frac{a_k}{b_k}, \frac{c_k}{d_k}\right) (a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{Z}; b_k d_k \neq 0)\ (1 \leq k \leq n).$$

Vermenigvuldig de veelhoek ten opzichte van O met de factor $b_1 d_1 b_2 d_2 \ldots b_n d_n$. Er ontstaat dan een nieuwe regelmatige n-hoek $Q_1 Q_2 \cdots Q_n$ waarvan alle hoekpunten *gehele* coördinaten hebben.
In deze n-hoek trekken we twee diagonalen, te weten $Q_{i-2}Q_{i+1}$ en $Q_{i-1}Q_{i+2}$, die elkaar snijden in een punt dat we R_i zullen noemen (zie figuur 1). Omdat $Q_{i-2}Q_{i+1}$ evenwijdig is met $Q_{i-1}Q_i$, alsmede $Q_{i-1}Q_{i+2}$ evenwijdig is met Q_iQ_{i+1}, is de vierhoek $Q_{i-1}Q_iQ_{i+1}R_i$ een parallellogram (zelfs een ruit). Van dit parallellogram hebben de drie hoekpunten Q_{i-1}, Q_i en Q_{i+1} gehele coördinaten.



Figuur 1



Figuur 2

Dus moet het vierde hoekpunt R_i ook geheeltallig zijn. (In vectornotatie $OR_i = OQ_{i-1} + OQ_{i+1} - OQ_i$).
Deze diagonaalconstructie voeren we uit voor alle i. Zodoende vormen we een nieuwe regelmatige n-hoek $R_1 R_2 \ldots R_n$ waarvan weer alle hoekpunten gehele coördinaten hebben.
De gelijkvormigheidsverhouding ρ_n tussen $R_1 R_2 \ldots R_n$ en $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ lezen we af uit de verhouding van de stralen der ingeschreven cirkels (zie figuur 2). Zij bedraagt

$$\rho_n = \frac{r_R}{r_Q} = \left| \frac{\cos \frac{3\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right|.$$

Het getal ρ_n hangt uitsluitend van n af, en omdat $n \geq 5$, $n \neq 6$ kunnen we vaststellen dat $0 < \rho_n < 1$.
De eerder genoemde diagonaalconstructie laat zich opnieuw toepassen op de n-hoek $R_1 R_2 \ldots R_n$ en zo voort. Bij iedere iteratie krijgen we een nieuwe regelmatige geheeltallige n-hoek met een diameter die een factor ρ_n maal zo klein is als die van zijn voorganger. Tenslotte ontstaat er een regelmatige geheeltallige n-hoek met een diameter die kleiner is dan de minimale onderlinge afstand van de geheeltallige punten in ons coördinatenstelsel. Dit is uiteraard onmogelijk, en daarmee is de stelling bewezen.

Opmerking. In de niet besproken gevallen ($n = 3$, 4 of 6) kunnen we gemakkelijk geheeltallig aangepaste coördinatenstelsels vinden, bijvoorbeeld door te definiëren $P_1 := (0,0)$; $P_2 := (0,1)$; $P_3 := (1,0)$.

Een variant op stelling 1 is de volgende uitspraak:

Stelling 2. Laat n een geheel getal zijn ($n \geq 5$, $n \neq 6$) en laat $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de hoekpunten zijn van een regelmatige n-hoek in het platte vlak V. Dan bestaat er geen getallenrechte in V met de eigenschap dat de loodrechte projecties van alle punten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ op deze getallenrechte rationaal zijn. (Een zgn. rationaal aangepaste getallenrechte.)
Bewijs: Uit het ongerijmde. Laat l een rationaal aangepaste getallenrechte in V zijn met nulpunt O. Neem l als X-as en zijn loodlijn door O als Y-as van een rechthoekig coördinatenstelsel. Blijkbaar laten de punten $P_k(k = 1, \ldots, n)$ zich in dit stelsel schrijven als

$$P_k : \left(\frac{a_k}{b_k}, \lambda_k\right) (a_k, b_k \in \mathbb{Z};\ b_k \neq 0;\ \lambda_k \in \mathbb{R})\ (1 \leq k \leq n)$$

We vermenigvuldigen de veelhoek ten opzichte van O met de factor $b_1 b_2 \ldots b_n$ en krijgen zo doende een regelmatige n-hoek $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ waarvan alle hoekpunten een gehele X-coördinaat hebben. (Van de Y-coördinaten weten we alleen dat ze reëel zijn.)
De herhaalde diagonaalconstructie is echter ook hier toepasbaar en levert bij elke stap een nieuwe regelmatige n-hoek op waarvan alle hoekpunten een gehele X-coördinaat hebben. Tenslotte ontstaat er een regelmatige n-hoek met een diameter kleiner dan de lengte-eenheid op de X-as. Dit is onmogelijk, dus de stelling is bewezen.

Aan de goniometrie ontlenen we de volgende hulpstelling:
Hulpstelling. Laat φ een reëel getal zijn, zodanig dat $\cos\varphi$ een rationale waarde heeft. Dan heeft $\cos k\varphi$ voor iedere $k \in \mathbb{N}$ een rationale waarde.
Bewijs: Met volledige inductie. $\cos 0\varphi = 1 \in \mathbb{Q}$, en $\cos 1\varphi \in \mathbb{Q}$ volgens het gegeven. Verder laat $\cos(k+1)\varphi$ zich rationaal uitdrukken in $\cos k\varphi$, $\cos(k-1)\varphi$ en $\cos\varphi$ door de formule
$\cos(k+1)\varphi = -\cos(k-1)\varphi + 2\cos k\varphi \cos\varphi$.

Stelling 3. Laat n een geheel getal zijn, $n \geq 5$, $n \neq 6$. Laat verder m een geheel getal zijn zó dat $(m, n) = 1$. Dan is $\cos\frac{m}{n}2\pi$ irrationaal.

Bewijs: Uit het ongerijmde. Neem aan dat $\cos\frac{m}{n}2\pi$ rationaal is. Dan is volgens de hulpstelling voor alle $k \in \mathbb{N}$ de waarde van $\cos\frac{km}{n}2\pi$ rationaal. Bijgevolg zijn de punten $(\cos\frac{km}{n}2\pi, \sin\frac{km}{n}2\pi)$ $(1 \leq k \leq n)$ precies de hoekpunten van een regelmatige n-hoek (omdat $(m, n) = 1$), waarvan de projecties op de X-as allemaal rationaal zijn. De X-as is dus rationaal aangepast. Volgens stelling 2 bestaat er evenwel geen rationaal aangepaste getallenrechte. Tegenspraak!

Bijgevolg moet $\cos\frac{m}{n}2\pi$ irrationaal zijn.

Slotopmerkingen

1 De enige rationale fracties van de volle hoek (2π) waarvan de cosinus rationaal kan zijn, bedragen volgens Stelling 3: $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}$ en $\frac{5}{6}$. Ze corresponderen in opklimmende grootte met de hoeken

$$0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \text{ en } \frac{5\pi}{3},$$

waarvan, zoals bekend de cosinus inderdaad in alle gevallen rationaal is.

2 Sin φ is dan en alleen dan rationaal, wanneer cos $(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ rationaal is. Voor de rationale fracties van 2π in $[0, 2\pi)$ vinden we dus een rationale sinuswaarde in de punten

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \text{ en } \frac{11\pi}{6}$$

en geen andere.

3 Als tan φ rationaal is, dan volgt uit de betrekking

$$\cos 2\varphi = \frac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1 - \tan^2\varphi}{1 + \tan^2\varphi}$$

dat cos 2φ ook rationaal is. Eenvoudige verificatie levert daarom een rationale tangenswaarde in de punten

$$0, \tfrac{1}{4}\pi, \tfrac{3}{4}\pi, \pi, \tfrac{5}{4}\pi, \tfrac{7}{4}\pi$$

en geen ander rationaal veelvoud van 2π in het interval $[0, 2\pi)$.

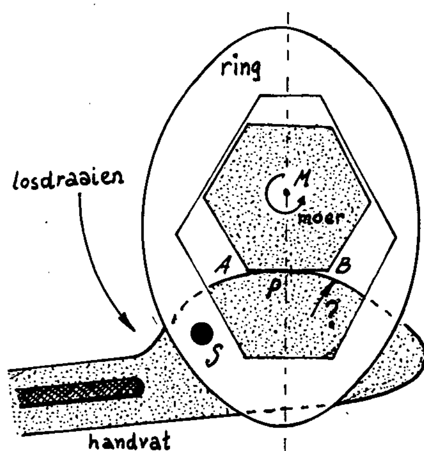
Literatuur

1 Bottema, O., *Rationale hoeken met een rationale cosinus*, Euclides *58* (1982-1983), p. 112.
2 Hadwiger, H., *Ueber die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie*, Elem. Math. *1* (1946), p. 98-100.
3 Hadwiger, H., und H. Debrunner, *Kombinatorische Geometrie in der Ebene*, Genève (1959) p. 9, 10, 59, 60.
4 Post, K. A., *Regelmatige roosterveelhoeken en roosterveelvlakken*, Nieuw Tijdschrift voor wiskunde 64 (1976-1977) p. 301-303.
5 Post, K. A., *Regular polygons with rational vertices*, The Mathematical Gazette *62* (1978), p. 205-206.
6 Pot, H., *Gonio als invalshoek*, Euclides *56* (1980-1981), p. 435-438.
7 Scherrer, W., *Die Lagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter*, Elem. Math. *1* (1946) p. 96-98.
8 Tzanakis, N., *A new proof of a theorem in trigonometry*, ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ, *2* (1979), p. 554-560.

Een merkwaardige kromme in een fietssleutel

HENK MULDER

Met een sleutel kunnen we een moer los of vastdraaien. Voor elke maat moer hebben we een andere sleutel nodig, tenzij we de sleutel kunnen verzetten. Er bestaat een type sleutel zoals in fig. 1 getekend. Hierbij kunnen moeren van diverse grootte, binnen zekere grenzen, aan- of losgedraaid worden. Een handvat is draaibaar aan een ring bevestigd (draaipunt S). In de ring zit een uitsparing in de vorm van een zeshoek met hoeken van 120°. De tekening spreekt verder voor zichzelf.



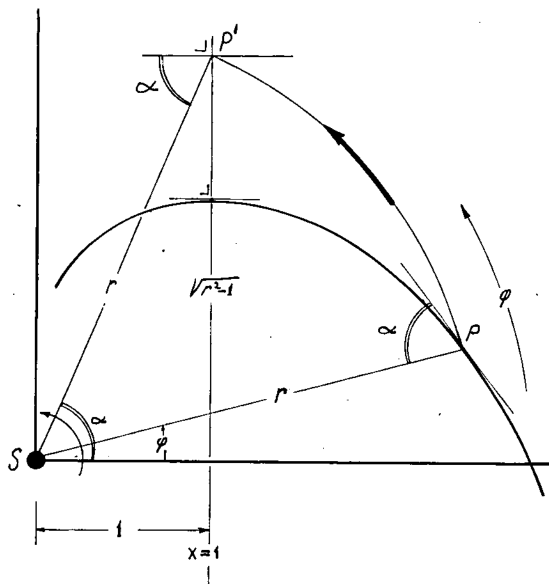
Figuur 1 Een continue fietssleutel

Wat ons fascineert is de vorm van de kromme, volgens welke het handvat de moer aandrukt. Dat moet correct gebeuren in het punt P.

Wat is correct?
De kromme moet de onderzijde van de moer raken en ..... dat moet steeds in het midden gebeuren. We kunnen het ook zo zeggen: we zoeken een kromme met deze eigenschap dat bij draaiing om S de symmetrie-as van de ring steeds loodrecht gesneden wordt.
Welke kromme doet dat? We zoeken een funktievoorschrift en proberen de kromme te construeren.

De voorwaarden

De lijn MP is de symmetrie-as van de ring. Het draaipunt S ligt buiten die lijn. We kiezen nu het punt S als oorsprong van een coördinatensysteem, de x-as door S loodrecht op MP en de y-as door S evenwijdig aan MP (fig. 2). De afstand van S tot de symmetrie-as van de ring is karakteristiek voor de fabricage van de sleutel. We stellen die afstand voor het gemak maar 1.



Figuur 2 Eigenschappen van de kromme

Het zal duidelijk zijn dat de gezochte kromme de lijn $x = 1$ in elke positie loodrecht moet snijden. In elke positie betekent: bij draaiing van de kromme om S. Laten we aan de hand van een voorbeeld op de wiskundige consequentie letten.

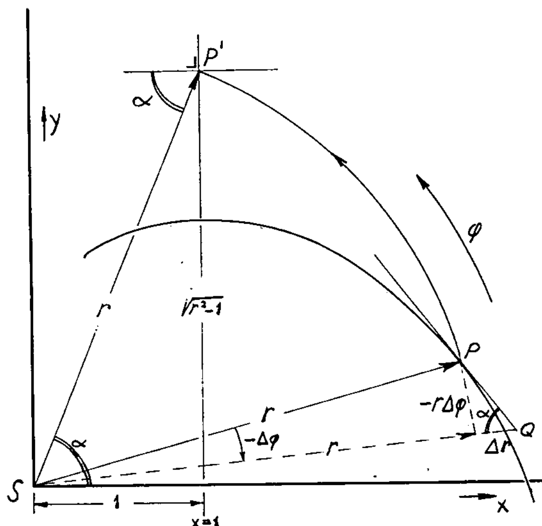
Wanneer bijvoorbeeld na draaiing over 52° punt P (fig. 2) is aangekomen in P' moet de kromme in P' de lijn $x = 1$ weer loodrecht snijden. Maar dat betekent dat de raaklijnrichting aan de kromme in P te construeren is door P via rotatie over 52° naar P' te verplaatsen, daar hoek α op te meten en die hoek weer over te brengen naar punt P en zo de raaklijnrichting in P te bepalen. Deze eigenschap moet voor elk punt van de kromme gelden.

De differentiaalvergelijking

Het blijkt voordelig te zijn om met poolcoördinaten te werken. In fig. 3 zijn twee driehoeken aangegeven die naderen tot gelijkvormigheid als $\Delta\varphi$ en Δr beide naderen tot nul.

Daaruit volgt: $-\dfrac{r \cdot d\varphi}{dr} = \dfrac{\sqrt{(r^2-1)}}{1}$

of $$d\varphi = -\frac{\sqrt{(r^2-1)}}{r} \cdot dr$$



Figuur 3 Opstelling van de differentiaalvergelijking

En hiermee is dan het lijnelementenveld gedefinieerd.
Oplossing van de differentiaalvergelijking geeft dan een verzameling integraalkrommen, waar we er dan achteraf één uit zullen kiezen.

Oplossing van de differentiaalvergelijking

$$\int d\varphi = \int -\frac{\sqrt{(r^2-1)}}{r} \cdot dr \text{ (voorwaarde } r > 1)$$

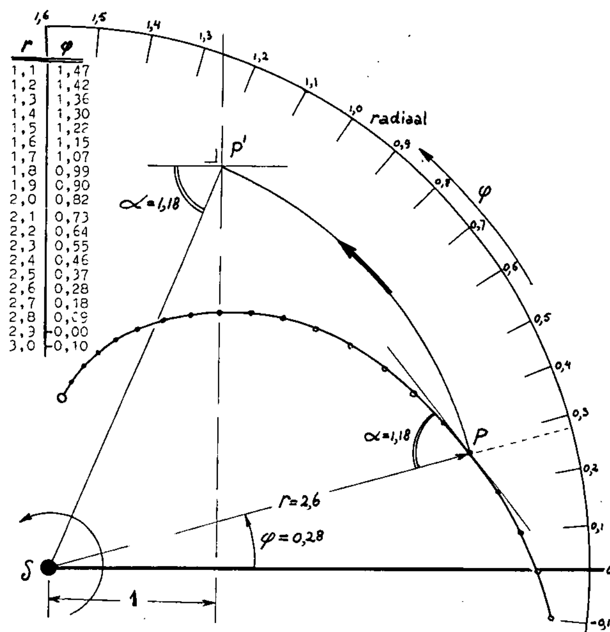
De tweede integraal is tamelijk bewerkelijk. We geven nu maar ineens de uitkomst. Wie wil, kan proberen de integraal zelf af te leiden.

$$\varphi = c + (\arccos\frac{1}{r}) - \sqrt{(r^2-1)}$$

Een geschikt domein is $1 < r \leqslant 3$.
Als we $r = 1{,}1$ invullen, volgt $\varphi = c - 0{,}029$
2,0 $c - 0{,}685$
3,0 $c - 1{,}597$
Om negatieve hoeken te vermijden en redelijk in het eerste kwadrant te blijven, kiezen we (overigens willekeurig) $c = 1{,}5$.
De funktie $\varphi = f(r)$ is dan aan te geven met het funktievoorschrift:

$$f: r \rightarrow 1{,}5 + (\arccos\frac{1}{r}) - \sqrt{(r^2-1)}$$

Grafiek
Voor een aantal waarden van r gelegen tussen 1 en 3 hebben we met een geprogrammeerde rekenmachine telkens de waarde van φ bepaald (fig. 4). De kromme is getrokken door de berekende punten.



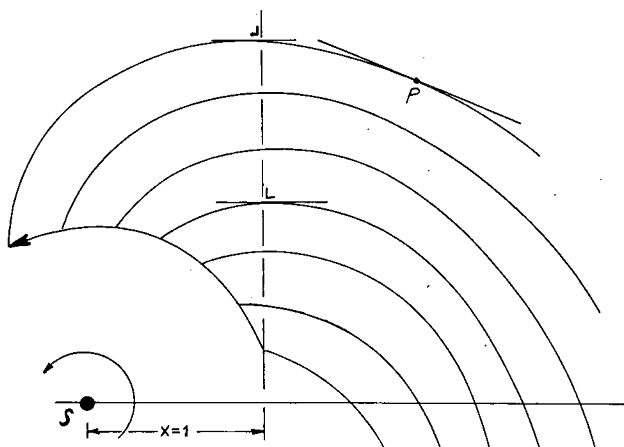
r	φ
1,1	1,47
1,2	1,42
1,3	1,36
1,4	1,30
1,5	1,22
1,6	1,15
1,7	1,07
1,8	0,99
1,9	0,90
2,0	0,82
2,1	0,73
2,2	0,64
2,3	0,55
2,4	0,46
2,5	0,37
2,6	0,28
2,7	0,18
2,8	0,09
2,9	-0,00
3,0	-0,10

Figuur 4 Constructie van de kromme

Voor één punt P met $r = 2{,}6$ en $\varphi = 0{,}28$ hebben we de eigenschap die we, in het begin van het verhaal, aan de gezochte kromme gesteld hadden, nog eens getest. Aan de gestelde voorwaarde wordt door de getekende kromme inderdaad voldaan.

Als we voor de constante c een andere waarde zouden kiezen, krijgen we dezelfde kromme enkel wat gedraaid om S.

De waarde van r heeft een ondergrens ($r = 1$), maar wiskundig gezien geen bovengrens. Mechanisch gesproken wordt de bovengrens bepaald door de afmetingen van de sleutel.



Figuur 5 Draaiing van de kromme om S

Opmerking

De kromme is in zoverre opmerkelijk dat het mogelijk is om met één kromme een geheel lijnelementenveld te bepalen.

Als we namelijk in een punt P de richting van het lijnelement willen kennen, draaien we de gegeven kromme om S zover door dat ze door P gaat en trekken dan in P de raaklijn aan de kromme (fig. 5). We hebben de kromme telkens wat verder doorgedraaid getekend.

Afwikkelingslijn van de cirkel

Als we de constante c voor het gemak gelijk aan 0 stellen en verder $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$ vinden we:

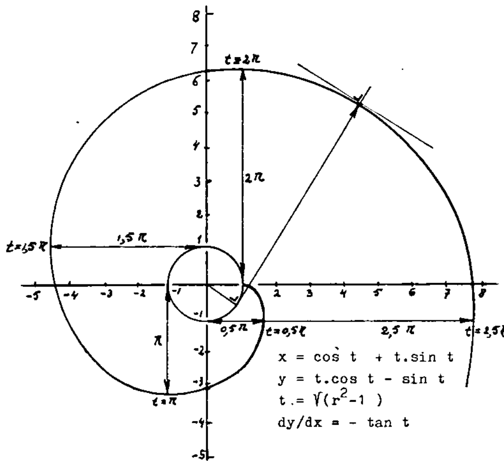
$$\begin{aligned} x &= r\cos[\arctan\sqrt{(r^2-1)} - \sqrt{(r^2-1)}] \\ &= \cos\sqrt{(r^2-1)} + \sqrt{(r^2-1)}\sin\sqrt{(r^2-1)} \\ y &= r\sin[\arctan\sqrt{(r^2-1)} - \sqrt{(r^2-1)}] \\ &= \sqrt{(r^2-1)}\cos\sqrt{(r^2-1)} - \sin\sqrt{(r^2-1)} \end{aligned}$$

Stel nu $t = \sqrt{(r^2-1)}$ dan krijgen we:

$$x = \cos t + t\cdot\sin t \qquad \text{en } \frac{dy}{dx} = -\tan t$$

$$y = t\cdot\cos t - \sin t$$

Gemakkelijk is aan te tonen dat dit de afwikkelingslijn van een cirkel is met centrum O en straal 1. Deze heeft inderdaad de eigenschap dat de raaklijn aan de cirkel de spiraal in het betreffende punt loodrecht snijdt (fig. 6).



Figuur 6 Afwikkelingskromme van een cirkel

Verlevendiging van de schoolwiskunde, een nascholingscursus

DOUWE KOK

De laatste jaren is er door de V.L.-V.U., maar recentelijk ook door de Vrije Universiteit, Rijks Universiteit Groningen en 'D'Witte Lelie' een nascholingscursus over verlevendiging van de schoolwiskunde aangeboden. In het volgende verhaal wordt iets over de cursus verteld. Ook de manier waarop sommige nascholers van de V.L.-V.U. en de V.U. tegen de cursus aankijken, wordt beschreven.
Zo wordt er een blik achter de schermen geboden.

Ontstaan

Binnen de leraren-opleiding is het volgende dilemma zeer reëel: moet je kiezen voor een proces-gerichte dan wel voor een produkt-gerichte benadering van de student. In het eerste geval vind je het belangrijk dat hij oog krijgt voor de leerlingen – wat willen ze weten, wat zijn hun problemen etc.. In het tweede geval ga je er van uit dat er toch wel een hoeveelheid kennis en vaardigheid is die iedere toekomstige leraar moet bezitten en de taak van de opleiding is het dan om daarvoor zorg te dragen.
Met simpelweg konstateren dat de waarheid in het midden ligt, ben je er niet. De praktijk van de leraren-opleiding wijst uit dat het juist een moeizaam zoeken naar een evenwicht is, waarbij de balans dan weer eens de ene, dan weer de andere kant uitslaat.

Op een zeker moment werd er tijdens de colleges onderwijskunde – vakdidaktiek op de V.L.-V.U. vooral procesmatig gewerkt: leraarschap is omgaan met kinderen en het leerproces bestaat voornamelijk hieruit dat de student al doende ontdekt welke manier bij hem past. De student maakt dan ook keuzen m.b.t. de dingen waarvan hij meer wil weten.
Voorwaar geen aanpak waar je schouderophalend aan voorbij kunt gaan.
Wel vroegen enkele collega's zich bezorgd af: er zijn toch al heel wat problemen door anderen ook aangepakt? Niet iedereen hoeft opnieuw het wiel uit te vinden?
Zo ontstond er voor vierde-jaars studenten een cursus die o.a. bevatte: verschillende introduktie-wijzen van negatieve getallen, een andere inoefenmethode van merkwaardige produkten en een verzameling ideeën rond de kubus. Gaandeweg

ontstond er bij docenten van deze cursus een bredere kijk op het 'ambachtelijke' van het leraarschap.
Goed leraar-zijn houdt ook in: een mooi verhaal kunnen vertellen, verbazing kunnen oproepen, verwarring misschien wel, maar dan wel de aangename verwarring die ontstaat als je getuige bent van iets 'wat gewoon niet kan'.
De leraar dus als goochelaar, als 'entertainer'. De leraar wiens lessen niet het vooroordeel 'wiskunde is saai, dor en niet te snappen' bevestigen.

Elke keer dat 'Verlevendiging van de Schoolwiskunde' door een andere docent gegeven werd, betekende dat een aanvulling op de voorraad ideeën. Iedere ervaren leraar heeft immers wel een paar best-sellers, en iedereen verstaat onder verlevendigingen weer wat anders.
Alle docenten konden zich vinden in de benadering: 'meesterschap is vakmanschap'.
Toen de nascholing belangrijker werd ontstond al gauw het idee dat het inmiddels tamelijk omvangrijke materiaal interessant zou kunnen zijn voor een aantal leraren.
In een folder werd de cursus als volgt omschreven:

> Verlevendiging van de Schoolwiskunde.
>
> Er zijn talrijke kleine vondsten en aardigheden waarmee je een nieuw onderwerp kunt beginnen, of een lastige rekenwijze speels kunt oefenen, of zomaar iets aardigs kunt doen om leerlingen te verbazen en te prikkelen.
> Een kruiswoordraadsel voor het ontbinden in factoren, een uitleg voor de stelling van Pythagoras die alleen maar van knippen gebruik maakt, spelletjes voor het rekenen met veranderlijken, een bewijs dat $0 = 1$ of dat iedere driehoek gelijkzijdig is. Veel hiervan staat al in schoolboeken, veel komt uit allerlei (ook engelstalige) tijdschriften, veel wordt mondeling van de ene wiskundeleraar op de andere overgeleverd.
> Het is voor een leraar, die meestal met één boek werkt, vaak lastig met al deze verlevendigingen in aanraking te komen. Deze cursus heeft de bedoeling een verzameling, die we zelf hebben aangelegd, door te geven en ook tijdens de cursus met eigen vondsten van de deelnemers aan te vullen.
> Een soort klapper met ideeën, die hoe langer hoe dikker wordt. Het is niet de opzet een heel onderwerp uit een schoolboek te vervangen (je moet niet zoiets als een IOWO-pakketje verwachten) maar we willen zo dicht mogelijk aansluiten aan het wiskunde lesgeven van dit moment.
>
> Tijdens de zittingen zullen we een aantal van die verlevendigingen met de deelnemers uitvoeren, omdat we menen dat ze pas hun aardigheid krijgen als ze echt in een groep gebeuren, als een leraar er een toneelstuk van maakt.
> Daarna zullen we er over praten hoe bruikbaar dit is in de les, op welke ogenblikken, en of mensen uit eigen ervaring nog meer van dergelijke dingen kunnen vertellen.

In het algemeen bleken de cursisten leraren te zijn die de eerste (beginners)-problemen achter de rug hebben. Ze staan met vrij veel zelfvertrouwen voor de klas maar hebben er moeite mee dat veel van hun leerlingen wiskunde een moeilijk en saai vak vinden. Ze verwachten dat ze in deze cursus ideeën opdoen om de sleur van alledag te doorbreken.

Voorgenomen houding t.o.v. de cursisten

Het was ons streven zo snel mogelijk een 'veilig klimaat' te scheppen. Vanaf het begin moest duidelijk zijn dat er geen sprake was van 'deskundigen die de eenvoudige leraren wel eens zouden vertellen hoe het volgens de laatste wetenschappelijke inzichten moest'. De cursusleiders wisten maar al te goed hoe moeilijk dat gewone lesgeven was (sinds enige tijd waren ze beiden weer werkzaam in het voortgezet onderwijs en de 'praxis-shock' hadden ze nog nauwelijks verwerkt). Vanuit deze vertrouwdheid met de problemen werden er ideeën, tips, mogelijkheden aangeboden. De ene leraar zou hier wat aan hebben een ander daar; dat wist zo'n leraar zelf het beste.
Bovendien, vertoon van deskundigheid roept over het algemeen slechts verdedigende reakties op. In zo'n klimaat is het slecht vernieuwen (een strategisch argument dat ook meespeelde). We wilden namelijk fundamentele diskussies niet uit de weg gaan (integendeel) maar die zouden dan moeten plaatsvinden in een sfeer van openheid, waarin men bereid was wat van elkaar te leren.

Omdat de cursus 's avonds, na een lange werkdag gegeven werd, kozen we voor een programma-opzet die flitsend van karakter was. Anecdote en tovertruuk, spelletje en fundamenteel gesprek, ze wisselden elkaar in hoog tempo af. Luisteren, kijken, praten en doen, het kwam allemaal aan bod. De cursisten kregen niet de kans af te haken, zo ze het al wilden. Dat we voor veel koffie hadden gezorgd, zal niemand meer verbazen. Dat op de tweede cursusdag een al wat oudere leraar een rol biscuits meegenomen bleek te hebben, beschouwden we als een aanwijzing dat er het gewenste klimaat heerste.

Rekening houden met je cursisten, het zit vaak in kleine dingetjes. In een eerdere cursus was gebleken dat men vaak moeite had met materiaal te verknippen, het moest natuurlijk onbeschadigd mee naar huis genomen kunnen worden. Deze keer konden we dit dilemma uit de weg ruimen. 'Knip maar, plak maar ... alles wordt nieuw. Het duurt maar een paar dagen'. Uren moet onze collega Douwe Wielenga in de weer geweest zijn het materiaal te verfraaien, en vervolgens tot fraaie pakketjes te laten samenbundelen.

Het lijkt een zelfsprekende zaak, maar voor ons is het een beslissende voorwaarde voor een goede nascholingscursus gebleken: uitgaan van de leraar, zoals die functioneert.
Dat uitte zich bij ons in:
- werken aan een 'veilig klimaat'
- zorgvuldig kiezen van plaats en tijd van de cursus
- goed verzorgen van cursus-materiaal

Een stukje uit de cursus

Als opleiders wilden we niet alleen ideeën doorgeven, ons optreden moest ook een model zijn van hoe je met het materiaal kan omspringen. Wij wilden zeker de 'entertainerskant' van het vak benadrukken.

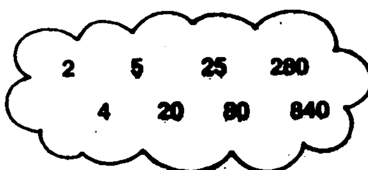
Eens kozen we voor de volgende opzet:
- een act rond de Möbius-band.
  Cursisten kijken (verbaasd) toe, raden wat er zal gebeuren, zoeken dan zelf een andere mogelijkheid uit.
- Hoe groot is een A-4 blaadje?
  Verband met weekbladen, de krant.
- Kun je, door alleen te vouwen, van een A-4 blaadje een gelijkzijdige driehoek maken?
- Toon door vouwen aan dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.
  (is dat een goed bewijs?)
- Een kwartetspel, om oplossen van vergelijkingen mee in te oefenen.
- Een kaarttruc die met wat wiskunde te doorzien is.

IDEAS

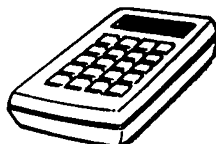
Division Game (2 teams)

How to play:

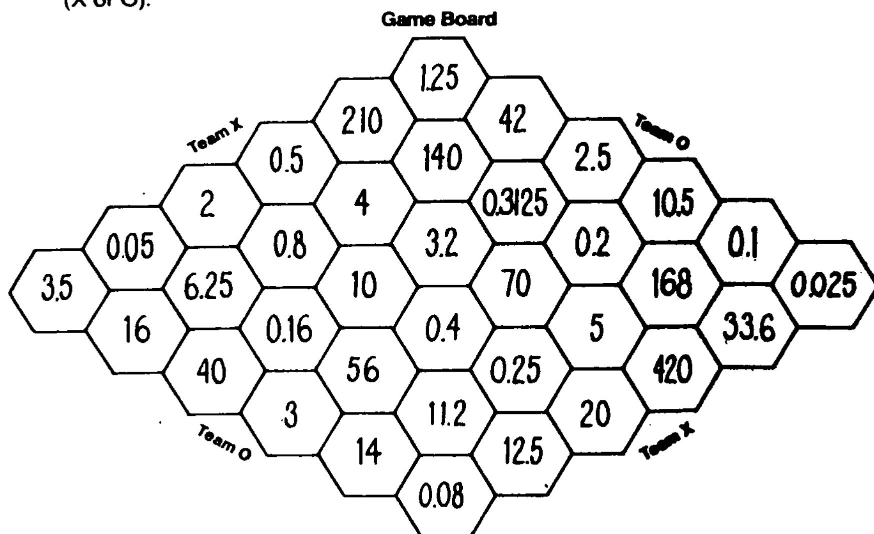
1. Teams take turns. Pick any two of these numbers.



2. Divide the numbers you picked



3. If the answer is on the game board, place your team's mark on it (X or O).



How to win: The first team to get a path of answers connecting its two sides of the game board wins.

Veel van onze cursisten hadden behoefte aan motiverende problemen om een onderwerp mee te beginnen, maar meer nog waren ze nieuwsgierig naar andere manieren om vaardigheden in te oefenen, alternatieven voor het 'stomme rijtjes maken'.
Het volgende idee sloeg erg aan: (zie figuur hiervoor).
'Hex' is een leuk spel, dat heel wat strategisch inzicht vergt. Het is daarom in een wiskunde-les goed op zijn plaats (zie Passen en Meten, deel 1, blz. 38-39).
In 'The Arithmetic Teacher' werd het spel omgebouwd tot het 'Division Game', waarmee je van alles (o.a. het schatten) kunt oefenen. Onze cursisten wisten talloze varianten te verzinnen. Zo kun je met wortel-vormen in 'het wolkje' allerlei herleidingen spelenderwijs oefenen. (Zo'n Idea-rubriek zou in Euclides ook niet misstaan).
Een ander spel werd door een cursist ingebracht.
Het betreft hier een tot kaartspel omgebouwde oefening in het oplossen van eerste- en tweedegraads vergelijkingen:

1	8	11
Is de vergelijking 1e graads?	Is de vergelijking een zuivere vierkantsverg.?	Breng alle termen naar de linkerkant
Ja, ga naar 2 Nee, ga naar 8	Ja, ga naar 2 Nee, ga naar 11	Ga naar 12

Het was een nog nauwelijks uitgewerkt idee.
Toch oogstte hij alom waardering. Voor mij gaf dat aan hoe groot bij onze cursisten de behoefte is aan het doorbreken van de gebruikelijke lesopzet.

Een jaar later

Ik heb een aantal cursisten nog eens telefonisch gevraagd naar hun mening, een jaar na de cursus. Dat leverde het volgende op: 'De cursus zou mij een klapper met ideeën bezorgen, zo was beloofd. Dat is uitgekomen. Ik heb heel nauwkeurig alle ideeën voor zover mogelijk in mijn 'docenten-handleiding' verwerkt. Ik had altijd al wat verlevendigings-ideeën, maar nu dwong de grote hoeveelheid mij tot systematiek. Graag zou ik een vervolg-cursus aangeboden krijgen, want al die ideeën ter verlevendiging, die hebben toch ook verdergaande consequenties, je gaat toch anders om met kinderen?'.
Twee leraren waren ook nog steeds tevreden, hadden het leuk, zelfs ontspannend gevonden, maar deden veel minder met het materiaal. Eigenlijk waren alleen de inoefen-spelen blijven hangen. Positief waren ze over het 'zelf-doen'. Hun enthousiasme over de cursus had ze in het begin tot eigen aktiviteiten in de klas gebracht, maar nu, een jaar later, was dat weer weggeëbd.

Een vierde cursist had al tijdens de cursus laten merken dat hij dringend behoefte had aan materiaal voor zijn leerlingen; werkeloze jongeren.
Dat materiaal kon ik hem toen niet geven en nu niet. (Waar zijn vakdidactici of leerboekschrijvers die leermateriaal voor dit type onderwijs maken?)

Vermeldenswaard is tenslotte de opmerking van deze leraar, over de spelletjes: 'het doel heiligt de middelen, als ik mijn leerlingen maar aan de slag krijg'. [Persoonlijke noot: het is ook mijn ervaring dat in problematische onderwijssituaties leraren grijpen naar leermiddelen die op korte termijn resultaat afwerpen, m.b.t. de orde (dat eerst) en proefwerkcijfers (goeie tweede).
Het realiseren van lange termijn-doelstellingen is iets wat 'we later wel zien', kennelijk ook voor leraren iets op lange termijn.]

Nog eens: de nascholers en hun visie op wiskunde-onderwijs

In deze nogal produkt-gerichte cursus werd door ons één visie duidelijk uitgedragen: een goede wiskunde-leraar is vooral een goede meester, vakmanschap is meesterschap. Het ging er niet om diepgaand van gedachten te wisselen over uitgangspunten van wiskunde-onderwijs.
Achter deze keuze zaten:
- een praktisch motief: we hebben dit materiaal en willen het verspreiden, en
- een strategisch motief: leraren komen wel op materiaal af, veel minder op filosofie. Maar misschien functioneert het materiaal als een 'stille kracht'.

Desgevraagd wilden we wel uitkomen voor onze visie op goed wiskunde-onderwijs. Typerend daarvoor is (naar onze mening):
- waardering van het gezonde verstand
- wiskunde is er voor om de werkelijkheid in je greep te krijgen
- wiskunde leer je door wiskunde te doen
- wiskunde kun je op verschillende niveaus 'goed' bedrijven

Voor die zaken stonden we. Maar recente ervaringen in de middelbare school hadden ons met de neus op de feiten gedrukt:

> '*Tussen droom en daad staan wetten in de weg.*
> *En praktische bezwaren.*
> *En ook weemoedigheid, die niemand kan verklaren.*
> *Maar die des avonds komt, wanneer men slapen gaat*'.

Het is duidelijk; we waren zeer voorzichtig in het 'profeteren, c.q. verkondigen van de waarheid'. Wel probeerden we de kansen te benutten als ze zich voordeden. En het materiaal riep fundamentele gesprekken op. De diskussies kregen dan alle ruimte. Erg belangrijk was ook dat er leraren waren uit alle soorten van onderwijs.
We stelden onze uitgangspunten, visie niet echt aan de orde. We boden vooral materiaal, maar ondertussen hoopten we toch stiekum de leraren via het aanbieden van alternatief materiaal aan het denken te zetten over hun huidige lespraktijk.

Verlevendiging van de Schoolwiskunde (V.S.) is een nascholingscursus bestemd voor leraren die lesgeven binnen het huidige wiskunde-onderwijs. De inhoud bestaat uit een hoeveelheid ideetjes om het onderwijs leuker, afwisselender te maken. Het is bepaald geen cursus die de leraren er bewust van probeert te

maken hoe ellendig het met de school in het algemeen en met de wiskunde in het bijzonder gesteld is. Wel proberen we aan te sluiten bij gevoelens van onvrede.

Als je de I.O.W.O.-benadering revolutionair noemt dan zou je de V.S.-aanpak met reformistisch kunnen aanduiden: werken binnen de smalle marges van de onderwijsvernieuwing aan de doorsnee-school.
Er is sprake niet alleen van een serieus nemen maar sterker nog van een solidariteit met de gewone man voor de klas. Moet jij ontbinden in factoren behandelen?, hier is een inoefen-manier. Geen diepgravende diskussie over 'wat moeten die kinderen met die sommen', maar juist werken vanaf de andere kant: 'Jij vindt dat je die sommen moet behandelen?, hier heb je een leukere aanpak, doe er je voordeel mee'.
En de leerling dan, zo zou men kunnen vragen. Moeten we niet uitgaan van de vermogens en behoeften van de kinderen? In deze cursus omzeilen we die vraag niet. Maar als we op zo'n cursus tot een antwoord komen dan moet dat een antwoord zijn waar zo'n leraar de volgende dag voor de klas wat mee kan beginnen. Anders bevorder je alleen maar de vervreemding van leraren. En van zich zelf vervreemde leraren die in hun lesgeven leerlingen meer zichzelf laten zijn? Ik zie dat niet zo voor me.
Met dit alles heb ik niets ten nadele willen zeggen van leraren die fundamentele veranderingen in hun klas nastreven. Ik wilde alleen opkomen voor die leraren die zich steeds tot marginale veranderingen in staat achten. Zij verdienen onze steun en sympathie i.p.v. het meewarige oordeel dat deze leraren in feite alles bij het oude laten.

Mededelingen

Jaardag van de sectie Educatie van het N.G.I.

Introductie van (Burger)informatica in het voortgezet onderwijs
Sprekers: Prof. dr Tj. Plomp (THT, AOI), Drs A. Putter (Ministerie EZ), Drs P. F. L. Verstappen (SLO), Dr J. Moonen (COI) en Drs T. J. van Weert (Ubbo Emmius).
Plaats: Jaarbeursgebouw te Utrecht.
Datum: vrijdag 17 juni 1983.
Kosten: leden NGI *f* 10,– excl. lunch /*f* 25,– incl. lunch, niet-leden *f* 15,– resp. *f* 30,–.
Aanmelding: door storting vóór 10 juni op postrekening 3194589 t.n.v. penningmeester Sectie Educatie onder vermelding van 'Jaardag Edu'.
Inlichtingen: J. M. T. Geurts, GCEI, Postbus 12108, 1100 AC Amsterdam. Tel. 020–72 82 22.

Rectificatie

In het meinummer staat bij het artikel over de Nederlandse Wiskunde Olympiade abusievelijk de naam H. J. Schuring vermeld. Dit moet zijn Dr J. van de Craats. Onze excuses.
de redactie

Waarom wiskunde in het secundair onderwijs?

ROSETTE AERTS

Ontstaan van dit artikel

De werkgroep 'Leraar-zijn' van WINA-studenten aan de KU Leuven organiseerde in juli 1982 een werkweek in Dworp. Het was voor mij als leerkracht wiskunde enorm boeiend om deze week te hebben meegemaakt. We discuteerden over de waarden van de wiskunde, over de betekenis van de wiskunde in de vredesopvoeding en over de opvoedingstheorieën van Thomas Gordon. In de loop van deze gesprekken hadden we het over de betekenis en de doelstellingen van het vak wiskunde in het secundair onderwijs en ook over de vraag 'Hoe motiveren wij onze leerlingen voor wiskunde?'. Deze ideeën heb ik samengebundeld in onderstaande tekst. Mensen die geïnteresseerd zijn in de werking van de groep 'Leraar-zijn', kunnen contact opnemen langs volgend adres:
Werkgroep 'Leraar-zijn', p.a. WINA-gang, Groenveldlaan 1, blok 3 bus O, 3030 Heverlee, België.

Inleiding

Het feit dat wiskunde een belangrijk onderdeel vormt in het programma van het secundair onderwijs, valt niet te ontkennen. De redenen hiertoe zijn fundamenteel. De wiskunde en haar toepassingen zijn zo verweven met ons dagelijks bestaan in een technologische wereld dat we haar niet onopgemerkt kunnen voorbij gaan. Bovendien biedt de wiskundestudie op zichzelf een aantal belangrijke vormende waarden en diegenen die de principes echt onder de knie hebben, kunnen er ook veel plezier aan beleven. Het is dan ook noodzakelijk dat we van deze rationele benadering van ons menszijn, evengoed als van geschiedenis en de gesproken talen het één en ander afweten vooraleer we ons op een welbepaalde taak in de maatschappij gaan toeleggen.

1 Wiskunde is onmisbaar geworden

1.1 *Al zeer vroeg ontwikkelde het menselijke brein wiskundige ideeën*
Reeds in het verre verleden was er bij de mens de nood aanwezig om zaken te tellen, om de grootte van hun bezittingen te omschrijven en te vergelijken. Ik kan mij trouwens niet inbeelden dat er enige vorm van (ruil)handel zou mogelijk zijn

zonder dat er ergens een begrip voor maat aanwezig is. De Egyptenaren gebruikten al een decimaal getallensysteem, waarmee ze konden optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen. Eveneens vind je in hun hiëroglyfen beginselen van meetkunde. Zij zochten namelijk een manier om de oppervlakte van de landbouwgronden te berekenen, want door de jaarlijkse overstroming van de Nijl, moesten zij telkens opnieuw hun velden kunnen afbakenen.
Deze begrippen zoals getal en oppervlakte, waren geen bestaande werkelijkheden. Zij zijn ontstaan in het wezen van de mens zelf, dankzij het menselijke denkvermogen. Zij zijn creaties van de mens, die hun oorsprong vinden in het zoeken naar aanvaardbare oplossingen voor praktische problemen.

1.2 *De huidige toepassingsgebieden van de wiskunde zijn enorm uitgebreid*
Heel veel andere wetenschappen gebruiken wiskundige begrippen en technieken. De fysica gebruikt haast alles wat er in de wiskunde gevonden wordt. Denk maar even aan de krachten die voorgesteld worden door vectoren en de snelheden die berekend worden met behulp van afgeleiden. Via integralen berekent men oppervlakten en inhouden die zonder dit begrip gewoonweg onopgelost blijven. Hoe dikwijls maakt men in de economie, de aardrijkskunde of zelfs de geneeskunde geen gebruik van diagrammen en grafieken om allerlei gegevens te interpreteren. De kansrekening en de statistiek worden tot in de psychologie toe terdege gebruikt. Het structuur-model blijkt een vruchtbare hulp bij de studie van de grammatica en de muziek, bij de etnologie en de psychoanalyse. Probeer dan nog maar eens te bedenken waar de technologie met al haar ingewikkelde machines en computers zou staan als ze geen gebruik kon maken van de wiskunde. Er zou gewoonweg niets van overblijven.
Welnu, aangezien de wiskunde zo fundamenteel verbonden is met praktisch alle wetenschappen die we kennen, kunnen we haar bestaan niet negeren. Ze is een onmisbaar deel geworden van ons Zijn, een wezenlijk stuk van onze cultuur. Wanneer we dan in het secundair onderwijs over algemene ontwikkeling durven spreken, kunnen we de factor wiskunde niet over het hoofd zien.

2 Wiskunde biedt vormende waarden

2.1 *De theorie zelf handelt over de mens en zijn contact met de wereld*
Men kan zich de vraag stellen of de wiskunde het heeft over dingen IN de mens of dingen BUITEN de mens. Men kan daar best op antwoorden door te zeggen dat de wiskunde UITEINDELIJK handelt OVER de mens en OVER zijn manier van leven in en omgaan met de wereld.
Maak een vergelijking tussen de politiek of de economie in enkele landen. Bepaalde kenmerken zijn op meerdere plaatsen terug te vinden: er zit een zekere systematiek in. Ook in andere domeinen zoals de taalstudie gaat men de opbouw ontleden en beschrijven. In de wiskunde bestuderen wij eveneens structuren. Het is hier nu belangrijk te beseffen dat wij niet alleen het initiatief hebben genomen: een mens kan namelijk pas structureren als er iets te structureren is. Welnu, het iets, de dingen, het bestaan is structureerbaar en dat is geen feit om aan voorbij te gaan. Het begrip 'structuur' krijgt daardoor betekenis en wordt autonoom. Het werken met dergelijke abstracte wiskundige modellen als dusdanig doet ons

universele ervaringen herkennen. De studie van deze rationeel ontstane mechanismen vormt dus een goede voorbereiding om de vele ingewikkelde facetten van de door mensen georganiseerde maatschappij beter te doorgronden.

2.2 *Wiskunde bedrijven veronderstelt vaardigheden die ook belangrijk zijn in het reële leven*

Door de studie van de wiskundige structuren, zoals hierboven beschreven, gaat men niet alleen de maatschappij en de andere wetenschappen beter kunnen begrijpen, maar ook in gesprekken met mensen bijvoorbeeld in vergaderingen, is het nodig om verbanden te kunnen leggen, om bijzaken van hoofdzaken te kunnen onderscheiden en te ordenen, om een structuur in het geheel van verwoordingen te kunnen terugvinden. Dit veronderstelt ook een grondige analyse van alle uitspraken en indrukken die op ons af komen.
Zo ook moeten we, vooraleer we aan de oplossing van een wiskundig probleem beginnen, de gegevens en de mogelijke veronderstellingen voldoende geanalyseerd hebben. Zoniet komen we in het verdere verloop wel eens tot nare tegenspraken en foutieve oplossingen. Vandaar ook de noodzaak om kritisch te staan tegenover een bewering. Zij moet wel degelijk bewezen, aan waarheden getoetst worden, vooraleer ze aanvaardbaar is. Bovendien moet het logisch redeneervermogen voldoende ontwikkeld worden om een bewijs te kunnen uitvoeren, evenals het gevoel om de stand van zaken en de gedachtengang zeer correct en overzichtelijk weer te geven. Deze vaardigheden zijn weerom geen louter wiskundige vaardigheden, omdat het er in het werkelijke leven ook onder meer op aankomt om voldoende kritisch te zijn in het verwerken van de berichtgeving die op ons toekomt. Evenzo moeten we soms ogenschijnlijk losstaande gegevens toch voldoende weten te ordenen en te analyseren, waardoor we weleens tot de ontdekking komen dat het ene feit het logische gevolg is van het andere. Of waardoor we eenvoudige voorspellingen kunnen doen, die anders nooit binnen ons gezichtsbereik zouden vallen.

In ons persoonlijk leven is het eveneens van belang om over onze eigen gedachten en gevoelens na te denken, om de logische samenhang te ontdekken, om oorzaak en gevolg te onderscheiden, om het rationele en het emotionele uit elkaar te halen en tegenover elkaar af te wegen. Op die manier staat een mens sterker tegenover zijn persoonlijke problemen, omdat hij doorziet waar het eigenlijk om gaat. Hij zal zijn eigen woorden en handelingen eerst overwegen vooraleer ze uit te spreken of uit te voeren. Evengoed zal hij beter voorbereid zijn op reacties van anderen waardoor hij deze kan relativeren of weerleggen indien nodig.

2.3 *Wiskunde leren in een klas betekent ook omgaan met mensen*

Een les wiskunde beleven, is evenmin als een ander vak een mensvreemde bezigheid. Ook in dit leerproces is het belangrijk om naar elkaar te leren luisteren, om aandachtig elkaars gedachtengang te volgen en alzo op een kritische en correcte manier deze aan te vullen, te weerleggen of op een andere wijze te formuleren. Elke schakel in het denken van de leerlingen, elke nieuwe manier van verwoorden kan de andere klasgenoten een heel stuk verduidelijking brengen. De persoonlijke inbreng binnen de grenzen van het lesverloop, mag dus

zeker niet verloren gaan. Ook in de wiskundeles moeten de leerlingen hun verantwoordelijkheid ten opzichte van elkaar opnemen door met hun eigen kennis en mogelijkheden, de andere leerlingen te helpen bij het verwerken van hun leerstof of bij het bespreekbaar stellen van bepaalde problemen. Pas als dit in het lesgebeuren mogelijk is, kan dit ook opengetrokken worden, vertaald worden naar de klas en schoolgemeenschap als geheel van personen met individuele normen en behoeften, en nadien naar de hele maatschappij.

3 Wiskundige bedrijvigheid als een expressievorm

3.1 *Wiskunde is kunst*

De wiskundige begrippen die de mens eeuwen geleden ontwierp en omschreef, werden gebruikt als bouwstenen voor nieuwe ideeën. Zo groeide er een formele, universeel aanvaarde taal die vele redeneringen sterk vereenvoudigt. Denk maar eens hoeveel moeilijker het is om een vergelijking op te lossen zonder gebruik te maken van symbolen.
Met deze taal is men verder gaan spelen en experimenteren. Het werd een kunst op zichzelf. Bij een onderzoek van de natuurlijke getallen bijvoorbeeld, komt men tot de constatering dat er priemgetallen aanwezig zijn. De ontdekking van dergelijke getallen is op haar beurt weer een aanleiding om het bestaan hiervan verder te bestuderen. Het wezen van de wiskunde begint alzo een eigen leven te leiden, die de nieuwsgierigheid en creativiteit van menig denker heeft aangesproken. Evenzo blijf ik wel eens stilstaan als ik merk hoe mooi een redenering in mekaar steekt of hoe haarfijn een bewijs is opgebouwd. Het plezier van de wiskunde zit hem er in om deze ontdekkingen en redeneringen opnieuw te doorleven, opnieuw te laten gebeuren, alsof het de eerste keer betreft.

Wiskunde leren begrijpen is zichzelf leren begrijpen, of beter de wiskundige in zichzelf ontdekken en laten spreken. Het is evenals schilderen en lichamelijke expressie een manier om zichzelf uit te drukken. Wiskunde doen is dus een ontplooiing van de mens, een emancipatie.

3.2 *Hoe dit overbrengen in het onderwijs?*

Ook al zijn sommige theorieën in vroegere tijden opgebouwd en ook al heeft een leerkracht die reeds vele keren doorgemaakt, voor de leerlingen is het alleszins de eerste keer dat ze met die leerstof geconfronteerd worden. Bepaalde redeneringen en conclusies kunnen zij zelf vinden. Geef hen dan ook de kans deze zelf te ontdekken en te formuleren. Een leerkracht moet een probleem op zo'n manier weten voor te stellen, dat ze een uitdaging vormt voor de leerlingen die er een oplossing voor moeten zoeken. De vraag mag niet te moeilijk, maar ook niet te gemakkelijk zijn, want dan gaat het plezier van het eigen denkwerk verloren.
Een leerkracht kan de leerlingen ook duidelijk maken dat de wiskunde niet af is, dat overal ter wereld wetenschappers zoeken naar verdere uitbreiding en verdieping van de bestaande kennis. Wat de leerlingen bestuderen, zijn dus geen oude overblijfselen, maar het zijn nog steeds basisbeginselen van jonge, levende gedachten die aan een voortdurende groei onderworpen zijn, zodat er ook nu nog onopgeloste problemen blijven bestaan.

Besluit

De toepassingen van de wiskunde zijn zo verstrengeld met onze maatschappij en onze manier van leven, dat onze jongeren ook wat van haar begrippen moeten afweten, willen zij zich niet laten overheersen door de steeds maar complexer wordende industrialisatie en automatisatie. Bovendien zijn de waarden die in de wiskunde aangeleerd worden ook overdraagbaar naar het leven en de omgang met mensen. Misschien is dit probleem moeilijker duidelijk te maken en ten uitvoer te brengen in het secundair onderwijs. Toch is het van belang daar op te wijzen en zelfs een aanvang te maken met de verwezenlijking ervan. Verder is de wiskunde niet louter een wetenschap in functie van andere wetenschappen, maar wiskunde bedrijven op zichzelf is ook een kans om eigen ideeën duidelijk te maken, aan anderen mee te delen. Er is wel degelijk schoonheid en plezier te vinden in die studie.

Bibliografie:

1 Devisch, *Congres van de VVWL*, Neerpelt, 26-29 juni 1981, Wiskunde en onderwijs 29 (1982), 7-9.
2 M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
3 G. Papy, *Hoe?* Wiskunde en onderwijs 29 (1982), 27-30.
4 F. van der Blij, *Wiskunde voor dagelijks gebruik, kan dat al op school, mag dat al op school, moet dat al op school?* Wiskunde en onderwijs 29 (1982), 19-22.
5 H. Van Looy, *Het nut van geschiedenis van de wiskunde voor het wiskundeonderwijs*, Wiskunde en onderwijs 24 (1980), 429-444.

Over de auteur:

Rosette Aerts studeerde wiskunde aan de K.U. Leuven (1974-1978). Zij geeft sindsdien les in het Francesco Paviljoen te Herentals, in afdelingen van het technisch secundair onderwijs. Momenteel werkt zij mee in de groep 'Leraar-zijn', die opgericht werd door wis- en natuurkunde studenten aan de K.U. Leuven.



Meisjes en Computers

CECILE MAURER-CRUTZEN

De opzet van dit artikel is vanuit de werkgroep 'vrouwen en computers' enkele kanttekeningen te plaatsen bij het invoeren van de vakken burgerinformatica en informatietechnologie en bij het computerondersteund onderwijs. Deze werkgroep 'vrouwen en computers' is een groep binnen het landelijk overleg 'vrouwen en wiskunde' (6). De werkgroep heeft tot belangrijkste doel, om zoveel mogelijk vrouwen te informeren over de voordelen, die onderwijs met en over computers kan bieden en te wijzen op de positieve en negatieve gevolgen, die de automatisering van onze maatschappij speciaal voor vrouwen kan hebben. De diskussie over deze gevolgen willen we zeker niet alleen beperken tot vrouwen maar uitbreiden tot allen die onderwijs geven en nemen en die onderwijsbeleid bepalen.

In de nota 'Onderwijs en Informatie technologie' (1, p. 22) wordt geconstateerd dat relatief weinig vrouwen posities bekleden in automatiseringsfuncties en dat de meeste vrouwen in het laagst gekwalificeerd werk, de gegevensverwerking, hun emplooi vinden. Er kan met recht gevreesd worden voor het ontstaan van een nieuwe elite (1, p. 19), de deskundigen die weten en beslissen, welke informatie de maatschappij en speciaal het onderwijs toebedeeld zal worden m.b.v. de computertechnologie. Onze werkgroep vreest bovendien dat deze elite gezien de maatschappelijke processen voor het merendeel uit mannen zal gaan bestaan.
De computer dringt onherroepelijk het onderwijs binnen en zal het onderwijs veranderen. Het onderwijs zal op velerlei plaatsen aangepast moeten worden aan deze nieuwe technologie (1).
De computer als hulpmiddel zal voor alle vakken binnen het onderwijs mogelijkheden bieden door gebruik te maken van de voordelen, die de computer als snelle verwerker van informatie heeft. Bij schooladministratie, studiebegeleiding, toetsen, remedial teaching, simulatie etc. zal de computer dan ook veel routinematige en tijdvergende handelingen kunnen overnemen (3), (4).
Een zinvolle indeling van de functie van de computer in het onderwijs is: de computer als hulpmiddel (Computer Ondersteunend Onderwijs, COO) en de computer met al zijn toepassingen als onderwerp van studie (Computeronderwijs) (2).

In het volgende deel van dit artikel wil ik enkele aspecten belichten, die kunnen bijdragen tot 'goede' deelname van meisjes aan computeronderwijs en

computerondersteunend onderwijs. Dit vakgebied is binnen het onderwijs nog in ontwikkeling en nog niet tot jongens- of meisjesterritoir verklaard. Het zou een uitdaging voor het onderwijs moeten zijn, om deze neutrale situatie te stimuleren.
De volgende punten kunnen daartoe een bijdrage leveren.

1 *Informatica mag geen B-vak worden*
De vakken burgerinformatica en leren over informatietechnologie zouden zo veel mogelijk losgekoppeld moeten worden van de B-vakken.
Een bekend gegeven is dat meisjes veel minder vaak dan jongens een exakt vak kiezen (5). Meisjes hebben veel grotere weerstanden tegen exakte vakken dan jongens (6), (7), (8). De koppeling van informatica aan exakte vakken zou bij voorbaat weer negatief uitwerken op de deelname van meisjes aan die vakken.

2 *Computergebruik op lage leeftijd*
De nota pleit voor deelname aan computeronderwijs door leerlingen ongeacht geslacht, herkomst en schooltype. Iedereen moet vertrouwd raken met apparatuur en kennis kunnen nemen van het functioneren van informatiesystemen (1, p. 11). Dit kan alleen verwezenlijkt worden, als deze kennismaking zal plaatsvinden op een lage leeftijd, bij voorkeur al in het basisonderwijs en als het vak (burger-) informatica een verplicht vak wordt voor alle leerlingen in de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs. Meisjes, die het relatief goed doen in het basisonderwijs, kunnen dan een zekere vertrouwdheid met dit aspect van onze samenleving opbouwen, voordat zij aan bepaalde keuzemomenten in het onderwijs toe zijn. Als meisjes een afkeer ontwikkelen voor computers zal dit al die vakken beïnvloeden, waarbij in de toekomst computers gebruikt zullen worden.

3 *Bewust rekening houden met meisjes-leerlingen*
Bij de samenstelling en keuze van leermiddelen en werkvormen in de klas zou bewust rekening gehouden moeten worden met meisjes.
- In het Ment-project (15) konstateert men dat de samenwerking in aparte meisjes- en in aparte jongensgroepen hechter is en dat in gemengde groepen de jongens meer het initiatief nemen dan de meisjes. Iedere docent(e), die iets aan computeronderwijs heeft gedaan, kent wel de fanatieke jongen, die niet meer is weg te slaan van de microprocessor. Deze leerlingen zullen vooral meisjes wegconcurreren. Als informaticadocent(e) zal men er voor moeten zorgen, dat deze computerfreaks niet de les gaan overheersen. Dit gedrag veroorzaakt bij alle leerlingen en vooral bij meisjes een negatief oordeel over hun eigen kunnen. Het samenstellen van groepen moet een bewuste keuze zijn en mag niet willekeurig plaatsvinden.
- De leerstof moet aansluiten bij de begintoestand van leerlingen, ook van meisjesleerlingen. Het gebruiken van voorbeelden uit de automatisering en programmering, die aansluiten bij de leefwereld van meisjes kan op deze begintoestand inspelen. Breipatronen zijn al eeuwenlang intelligente voorbeelden van gestructureerd programmeren. Bij automatische wasmachines worden door vrouwen al tientallen jaren de programma's gekozen voor de bepaalde wassoorten, die zij in de automaat invoeren. Dit mag er natuurlijk niet toe leiden, dat men meisjes alleen maar vertrouwd maakt met deze 'typisch

vrouwelijke' toepassingen. Het gebruik van deze voorbeelden zou wel kunnen leiden tot een goede startpositie van meisjes in het onderwijs met en over computers. De samenleving vertoont nu reeds rolbevestigende tendensen voor mannen en vrouwen bij het computergebruik. Een illustratief voorbeeld hiervan is de zinsnede uit een artikel uit het dagblad 'de Limburger' (24 april 1982, p. 27).

> 'Aangesloten op het televisietoestel biedt deze thuiscomputer (merknaam) tal van mogelijkheden. Moeder vindt er haar recepten mee, vader maakt er zijn calculaties mee, zoonlief kan er zijn rekenkennis mee vergroten en dochterlief haar taalgebruik'.

- In een historisch overzicht van de ontwikkeling van computers mag de naam van de wiskundige Lady Ada Lovelace niet ontbreken. Zij heeft grote invloed op het werk van Charles Babbage uitgeoefend, die algemeen wordt beschouwd als de uitvinder van de computer. Zij was als eerste bewust van de maatschappelijke en filosofische problemen, die computers kunnen veroorzaken (9).
- Bij de aanschaf van boeken over informatica zal men niet moeten kiezen voor boeken, die een weerspiegeling zijn van de huidige automatiseringswereld. Vrouwen treden hierin alleen op als data-typisten. Mannen nemen in deze boeken te vaak het meer intelligente deel van de automatisering voor hun rekening. Auteurs van boeken zouden bewust eens de rollen moeten omdraaien. De maatschappij geeft wel tegengas genoeg om de balans van de neutraliteit in evenwicht te houden.

4 *Voorlichting van dekanen*
Door de toenemende automatisering zal het scala van beroepen totaal veranderen. Er zullen veel beroepen verdwijnen en er zullen beroepen bij komen. Meisjes moeten worden voorgelicht dat de dienstverlenende administratie bijna volledig wordt overgenomen door automaten en dat het overblijvend administratief werk veelal zal verschralen tot eenvoudig en saai werk (12). Meisjes moeten worden voorbereid op een keuze voor hoger gekwalificeerde beroepen in de automatisering. Beroepen, die een grote flexibiliteit en aanpassingsvermogen eisen, omdat ze aan snelle veranderingen onderhevig zijn. Vrouwen moeten erop voorbereid worden, dat automatiseren in de komende jaren steeds opnieuw nascholing en omscholing van hen eist. Deze eisen mogen niet leiden tot een vlucht van vrouwen uit het beroepsleven.

5 *Zoveel mogelijk vrouwen betrekken bij onderwijs met computers*
In 'Rekening houden met individuele verschillen' (10) wordt het feit dat er in Nederland weinig vrouwelijke wiskundedocenten zijn, genoemd als een van de mogelijke oorzaken voor de geringe keuze van meisjes voor wiskunde en technische vakken. Door een grotere deelname van vrouwen in het onderwijs met en over computers kan er een sterkere identificatie van meisjes met dit vakgebied plaatsvinden.
Men zou moeten stimuleren, dat veel vrouwen in het onderwijs zich gaan bezig houden met computers. Dit betekent voor de beleidmakers, dat er konkrete voorwaarden voor deelname van scholen aan informaticaprojecten zouden moeten komen. Het team, dat het project gaat uitvoeren moet in voldoende mate

uit vrouwen bestaan. Bij nascholingscursussen kan men evenredige deelname van vrouwen bevorderen, door voor vrouwen lestijd vrij te maken zodat zij kunnen deelnemen. Nascholingscursussen op tijdstippen laten plaatsvinden die geschikt zijn voor vrouwen etc..
De werkgroep 'vrouwen en computers' start dit jaar voor het eerst met een eendaagse drempelcursus, met als doel zoveel mogelijk vrouwelijke wiskundigen te laten kennismaken met de computer en zijn mogelijkheden. Wij hopen daarmee veel vrouwen te stimuleren de computer te gaan gebruiken in het wiskundeonderwijs. De computer kan wiskundeonderwijs verlevendigen (11):

- Parameterkrommen worden op een beeldscherm daadwerkelijk in de tijd doorlopen.
- Rijen kan men op een beeldscherm sterk en zwak zien konvergeren.
- Matrix-berekeningen zijn niet beperkt tot een dimensie vier. De computer neemt veel routinerekenwerk over.
- Het zelf maken van computerprogramma's kan de creativiteit en het inzicht van leerlingen vergroten, mits de gekozen programmeertaal niet al te veel belemmeringen oproept.

Vanzelfsprekend proberen wij vrouwen te helpen bij het samenstellen van criteria, die kunnen leiden tot goed computergebruik. De computer in het wiskundeonderwijs zal hieraan een dimensie moeten toevoegen en niet gaan dienen als vervanger van goed onderwijs.
In een later stadium hopen wij meer vrouwen ook buiten het wiskundeonderwijs te kunnen begeleiden bij het gebruik van computers in het onderwijs.

6 *Starten met experimenten waarbij de computer een hulpmiddel is om achterstanden bij meisjes weg te nemen*
Meisjes lopen in hun schoolloopbaan achterstanden op (13). Er ontstaan hiaten waardoor meisjes kiezen voor lagere onderwijsvormen, eerder ons onderwijs verlaten, en minder exakte opleidingen en vakkenpakketten kiezen. Remedial teaching zou meisjes kunnen helpen bij het wegwerken van deze achterstanden. In (14) wordt in een model aangegeven hoe m.b.v. de computer achterstanden kunnen worden weggewerkt bij havo-leerlingen bij de overgang naar het H.T.O.. Een analoog onderwijsmodel zou meisjes ook kunnen helpen bij het wegwerken van hun achterstanden in het onderwijs. Experimenten zouden de zinvolheid van een dergelijk computergebruik kunnen aantonen.

De werkgroep meent door middel van dit artikel een bijdrage te leveren tot de diskussie over de invoering van computers in het onderwijs. Reakties op dit artikel zien wij graag tegemoet. Het kontaktadres van de werkgroep is:
Betsy van Rheenen, Salamanderweide 15, Nieuwegein. Tel.: 03402-3 69 77.

Over de auteur:

Cecile Maurer-Crutzen studeerde wiskunde aan de T.H. te Aken en is sinds 1975 als wiskundedocente verbonden aan het St. Maartenscollege te Maastricht.

Literatuur:

1 Nota, *Onderwijs en Informatietechnologie*, Tweede kamer, zitting 1981-1982, 17546, nrs. 1-2.

2 Stef Blom, *Een poging tot ordening van een chaos: de terminologie en begripsvorming rond de computer in het onderwijs*, VOC Nieuwsbrief, jaargang 6, nr. 5, okt. 1982.
3 Themadag: *De computer in het basis- en voortgezet onderwijs*, VOC Publicatiereeks 81/03.
4 *De computer als remedial teacher*, VOC Publicatiereeks 81/01.
5 Ineke de Raaff, Jan H. Raat, *Meisjes en exakte vakken*, Ment 82-04, THE maart 1982.
6 Francis Meester, *Met wiskunde meer vrouw(?)*, Euclides, 58e jaargang 1982/1983, no. 3, november.
7 Ilja Mottier, Jan H. Raat, *Marie, word wijzer ... van natuurkunde*, Adviesgroep leermiddelen, Minist. van Onderwijs en Wetenschappen, TR 812353-1200, december 1980.
8 Irmgard Eckelt, *Mathematik – nix für Frauen?!!*, ISBN: 3-921975-02-6, Albatros Verlag GmbH, 1981.
9 Christopher Evans, *The mighty micro*, ISBN: 0-340-25975-2, Coronet books, 1980.
10 Francis Meester, George Schoemaker, Jaap Vedder, *Rekening houden met individuele verschillen*, Ned. Vereniging van Wiskundeleraren, 1980.
11 F. Goethals, *Ervaringen met de microcomputer in het wiskundeonderwijs*, VOC Publicatiereeks 81/03.
12 Ina Veld, *Vrouwen en chips*, Tijdschrift voor vrouwenstudies 11, jaargang 3, nr. 3, 1982.
13 Juul Mostert, *Vrouwen komen met minder kansen op de arbeidsmarkt*, Uitleg magazine, 43ste jaargang nr. 5, 16 november 1978.
14 H. Kramers-Pals, R. van Asselt, *Een onderwijskundig model ter strukturering van de analyse en aanpak van aansluitingsproblemen*, VOC Publicatiereeks 81/01.
15 Mathieu Dumont, *De slingerproef*, Ment 82-02, THE maart 1982.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

488. Zowel $x^2 + 5x + 6$ als $x^2 + 5x - 6$ kunnen in factoren ontbonden worden. En dus ook $x^2 - 5x + 6$ en $x^2 - 5x - 6$.
Naar aanleiding hervan de vraag:
voor welke $a \in \mathbb{Z}^+$ en $b \in \mathbb{Z}^+$ hebben

$$x^2 + ax + b = 0 \text{ en } x^2 + ax - b = 0$$

beide twee wortels in $\mathbb{Z}$? (A. W. Boon, Leidschendam)

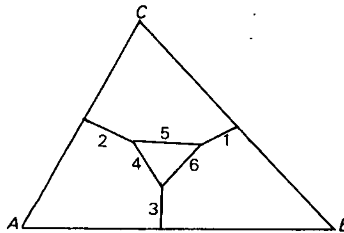
489. Gevraagd wordt een rechthoek in rechthoeken te verdelen. Geen echte deelverzameling van deze rechthoeken die uit meer dan één element bestaat, mag weer een rechthoek vormen.
Noem het aantal deelrechthoeken n. Volgens een opgave in Pythagoras is een verdeling met $n = 6$ onmogelijk. Voor welke n is een verdeling wel mogelijk?

490. Op hoeveel manieren kan een convexe n-hoek in driehoeken verdeeld worden door elkaar niet snijdende diagonalen? Men kan volstaan met het geven van een recursieformule. (uit Heinrich Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover ed.)

486. Verdeel een driehoek in een minimaal aantal vijfhoeken. Twee aangrenzende vijfhoeken moeten precies één zijde gemeen hebben. Onderstel het aantal vijfhoeken is n. Deze hebben als hoekpunten:
de drie hoekpunten van de driehoek en nog
p punten op de zijden
q punten binnen de driehoek.
De som van de hoeken van de n vijfhoeken is $n \cdot 540°$.
Dit levert
$180° + p \cdot 180° + q \cdot 360° = n \cdot 540°$
$1 + p + 2q = 3n$ (1)
Nu tellen we het aantal zijden. Onderstel uit elk hoekpunt van de driehoek vertrekken 2 zijden, uit elk van de p punten op de zijden 3 zijden en uit elk van de q inwendige punten ook 3 zijden. Dan zou
$3 + 2p + 3q = 5n$
zijn. Er kunnen echter meer zijden zijn. Onderstel het aantal extra zijden dat uit de diverse punten vertrekt is in totaal a. Dan krijgen we
$3 + 2p + 3q + a = 5n$ (2)
Uit (1) en (2) volgt
$n = 3 + p + 2a$
Omdat de drie hoekpunten van de driehoek hoekpunten van vijfhoeken moeten zijn, geldt
$p + a \geqq 3$
Dit levert de volgende mogelijkheden:

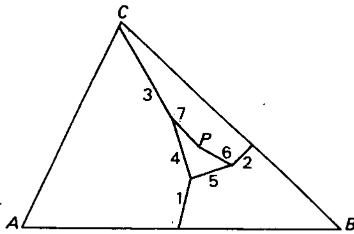
p	a	n
3	0	6
4	0	7
2	1	7
5	0	8
3	1	8
1	2	8

welke echter geen van alle realiseerbaar zijn. Aan een tweetal voorbeelden demonstreren we, hoe dit aangetoond wordt.
Het geval $p = 3$, $a = 0$

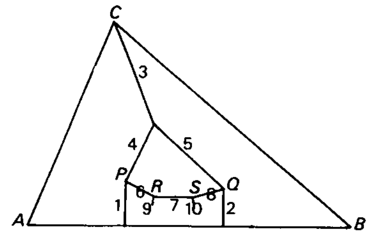


We zijn verplicht de lijnstukken 1, 2 en 3 aan te brengen. Omdat A hoekpunt van een vijfhoek moet zijn, zijn we gedwongen 4 te tekenen en analoog 5 en 6. Wegens $a = 0$ zijn verdere lijnstukken onmogelijk. Zodat we vastgelopen zijn.

I



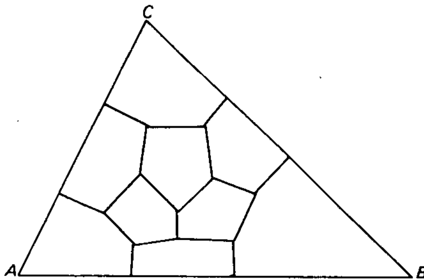
II



Het geval $p = 2, a = 1$

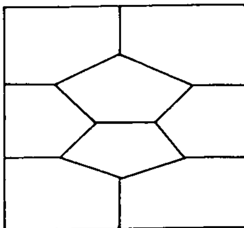
Geval I. Begin met 1, 2 en 3. Daarna om vijfhoeken te vormen 4, 5 en (6 en 7). Nu is er nog maar één punt van waaruit we een nieuwe zijde moeten aanbrengen, nl. P. We lopen vast.
Geval II. Begin met 1, 2 en 3. Daarna om vijfhoeken te vormen 4, 5 en (6, 7 en 8). Nu zijn er twee punten van waaruit we nog een nieuwe zijde moeten aanbrengen, nl. P en Q. Dit verplicht ons tot 9 en 10. Daarna moeten we 7, 9 en 10 tot een nieuwe vijfhoek completeren enz. Ook zo lopen we vast.
In het staatje zijn alle mogelijkheden opgesomd met $n \leqq 8$. Deze lopen op analoge manier alle vast. Echter $n = 9$ lukt, zoals in onderstaande figuur te zien is.

Het geval $p = 6, a = 0, n = 9$

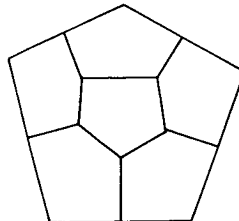


Tenslotte hier nog de verdeling van de vierhoek, de vijfhoek en de zeshoek.

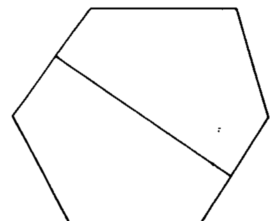
$p = 6, a = 0, n = 8,$



$p = 5, a = 0, n = 6,$



$p = 2, a = 0, n = 2$



Men bewijst op analoge wijze dat de gevonden waarden voor n minimaal zijn.

487. Interlokaal mochten we 42 sec telefoneren voor 14 cent. Dit werd veranderd in 45 sec voor 15 cent. Is dit eerlijk?
We nemen een tijdinterval van 14 · 45 sec. Dit verdelen we in 14 perioden van 45 sec. We nemen één gesprek van 0–1 sec, één van 1–2 sec enz. We gaan na wat de cliënt voor deze gesprekken meer betaalt dan vroeger.

rangnr. periode	duur van het gesprek in sec	nadeel voor de cliënt in ct. per gesprek	totaal	samen
1	0-42	1	42	
	42-45	−13	−39	3
2	1 · 45 + 0-39	2	78	
	39-45	−12	−72	6
3	2 · 45 + 0-36	3	108	
	36-45	−11	99	9
4	3 · 45 + 0-33	4	132	
	33-45	−10	−120	12
...				
14	13 · 45 + 0-3	14	42	
	3-45	0	0	42
				——— +
				7 · 45

Over 14 · 45 gesprekken wordt dus 7 · 45 cent extra betaald. Zodat de gemiddelde kosten van een gesprek $\frac{1}{2}$ cent hoger worden.
Elke volgende periode van 14 · 45 sec levert een zelfde uitkomst.
Een verrassend resultaat, dat PTT zelf ook wel niet vermoed zal hebben.

Boekbesprekingen

B. Nijdam, H. van Buuren, *Statistiek voor de sociale wetenschappen*, 2 banden, Samson uitgeverij, Alphen aan den Rijn/Brussel, 1981/1980, *f* 39,– en *f* 59,50

Deze methode is geschreven voor studenten pedagogiek en andragogiek, maar – volgens de auteurs – ook zeker geschikt voor studenten in de psychologie, sociologie en pedagogie, terwijl ook anderen die de statistiek als hulpwetenschap gebruiken er een nuttig gebruik van kunnen maken.
De bedoeling van de auteurs is niet alleen de in de sociale wetenschappen voorkomende statistische technieken te geven, maar ook via eenvoudige doch sprekende voorbeelden de achterliggende theorie naar voren te brengen. Mede door de ruime opzet (al met al zo'n kleine 1000 bladzijden), de stapsgewijze opbouw en de grote hoeveelheid zeer verhelderende plaatjes is men daar zeker in geslaagd.
Verder hebben de auteurs geprobeerd deze methode zo te maken dat deze door de studenten volledig zelfstandig te bestuderen is. Daartoe zijn, naast de al genoemde, nog de volgende zaken systematisch door de boeken heen gepraktiseerd.
Elke band bestaat uit drie delen (beschrijvende statistiek, kansen bij steekproeftrekkingen, toetsings- en scattingstheorie, associatie bij steekproeven, eksperimenten bij twee groepen, eksperimenten bij meer dan twee groepen), die elk in een aantal hoofdstukken met een afgeronde hoeveelheid leerstof zijn verdeeld. Aan het begin van elk hoofdstuk is aangegeven wat er konkreet na afloop gekend en gekund moet worden. Om na te gaan of dat zo is, wordt elk hoofdstuk afgesloten met een tiental meerkeuzevragen. Elk deel wordt afgesloten met een toets over het grotere leerstofgeheel, dus ook de samenhang van de behandelde begrippen komt aan de orde. Verder is de tekst doorspekt met vragen waarvan op aparte bladzijden de antwoorden staan.
Op andere bladzijden zijn overzichten per deel en de benodigde statistische tabellen toegevoegd.
De bekend veronderstelde wiskunde is summier: volgens de auteurs op HAVO-3-niveau. In deel 1

wordt gebruik gemaakt van een zakrekenapparaat, in deel 2 van een komputer met statistisch programmapakket SPSS.
Het geheel overziende viel mij op dat de auteurs zich konsekwent aan hun uitgangspunten hebben gehouden. De voorbeelden en toepassingen zijn statistisch relevant en voor de lezer interessant. Een geslaagde methode, zo is mijn eindoordeel.
Door de opzet en de grote hoeveelheid informatie en voorbeelden lijkt mij deze methode ook voor docenten HAVO/VWO veel lezenswaardigs te bieden; niet alleen om te zien hoe statistiek in een voortgezette opleiding eruitziet, maar ook om de eigen statistische kennis uit te breiden.
Tot slot een negatief punt. Het geheel is losbladig in een grote opbergband (2 x) en daardoor zeer volumineus. De door de auteurs genoemde voordelen (antwoorden tussensteken, bepaalde stukken eruithalen, tabellen en overzichten ter plaatsen tussenvoegen) lijken mij niet tegen het nadeel (de omvang) opwegen. Gezien de prijs is dit echter zeker geen onoverkomelijk bezwaar.

Bert Zwaneveld

P. Blom, *Werken met cijfers*, Vuga-uitgeverij 's Gravenhage 1981, 91 blz., *f*24,–.

Zoals de ondertitel vermeldt, is dit boek bedoeld als kennismaking met de *beschrijvende statistiek* voor sociale functionarissen. De schrijver constateert in zijn inleiding dat in veel sociale opleidingen statistiek een gevreesd vak is. Gevreesd vanwege vermoede saaiheid en gevreesd door velen die de kennelijk zo broodnodige wiskundeknobbel missen. Deze vrees is geheel ten onrechte zo vervolgt de auteur. En een ieder die dit boek leest, zal m.i. tot dezelfde conclusie moeten komen. Want saai is dit boek allerminst. Alle voorbeelden in het boek zijn uit het 'sociale werkveld' gekozen, zodat de lezer die in bedoeld veld werkzaam is veel uit de dagelijkse praktijk zal herkennen. Bovendien laat de schrijver in dit boekje zien dat men ook zonder wiskundige formules heel redelijk uit de voeten kan. Dat een dergelijk uitgangspunt beperkingen stelt aan de te behandelen onderwerpen zal duidelijk zijn.
Het boek bestaat uit de volgende vier hoofdstukken:
1 Wat kan en moet u met beschrijvende statistiek?
2 Opstellen en bewerken van frequentieverdelingen.
3 Vergelijken van gegevens en onderzoeken van samenhang.
4 Presenteren van resultaten.
In hoofdstuk 1 komen een aantal mogelijke toepassingen van de statistiek aan de orde. De schrijver besteedt hier – zoals in het hele boek – veel aandacht aan de statistische valkuilen waarin men gemakkelijk valt (foute interpretatie van gegevens, schaalverdeling bij grafieken, schijnverbanden e.d.). Tevens krijgt de methode van onderzoek een ruime plaats.
De inhoud van hoofdstuk 2 is: frequentieverdelingen (frequentiedichtheid, cumulatieve frequentieverdelingen, scheve verdeling e.d), centrummaten (rekenkundig gemiddelde, modus, mediaan), spreidingsmaatstaven (variantiebreedte, gemiddelde absolute afwijking, kwartielafstand). De standaardafwijking valt vanwege het al eerder genoemde uitgangspunt buiten het bestek van dit boek.
De onderwerpen van hoofdstuk 3 zijn: seizoenpatroon (additief), enkelvoudige en samengestelde indexcijfers en correlatie. Het wiskundig karakter van het laatste onderdeel noopt de schrijver weer tot een uiterst summiere behandeling.
In het laatste hoofdstuk beschrijft de auteur de diverse presentatiemogelijkheden van gegevens. Ook hier weer veel aandacht voor de meest voorkomende fouten.
De vele ruim opgezette en goed uitgevoerde tabellen en figuren die de tekst begeleiden maken het geheel tot een overzichtelijk werk.
Enkele punten van kritiek: de verwerking van de gegevens uit de tabellen 2 en 3 in tabel 4 is fout en daarmee vervalt ook de grond voor de begeleidende opmerking.
Bij fig. 3, fig. 21 en fig. 33 hadden m.i. resp. de termen histogram, spreidingsdiagram en frequentiepolygoon niet onvermeld mogen blijven. De behandeling van de klassebreedte en het klassemidden is niet duidelijk: m.n. zijn de zin op blz. 21 'als we schrijven 25 tot 34 jaar, dan bedoelen we 25 tot en met 34 jaar', en tabel 23 verwarrend. Een ruimere behandeling van dit onderwerp lijkt wenselijk.
De literatuurlijst (4 titels) die het boek afsluit, wekt niet de indruk zorgvuldig en volledig te zijn. Boek 3 uit deze lijst hoort hierin m.i. niet thuis terwijl andere goede boeken onvermeld blijven. Ik noem hier

slechts 'T. de Groot-Hovens Grève, Statistiek Anders 1', een boek dat werkend vanuit dezelfde uitgangspunten een herhaling en verdieping geeft van het onderhavige werk.
Samenvattend: een goed boek voor allen die werkzaam zijn in het 'sociale veld' en in die hoedanigheid te maken hebben met beschrijvende statistiek.
Of het boek – zoals de achterkant vermeldt – ook uitstekend geschikt is voor studerenden aan een sociale opleiding op M.B.O.-niveau, meen ik tegen de achtergrond van het ontbreken van opgaven (= *zelf werken met cijfers*) en de summiere behandeling van enkele onderwerpen te moeten betwijfelen.

R. Bosch

Mededelingen

Nascholingscursussen voor leraren

In het cursusjaar 1983/84 staan de volgende nascholingscursussen voor leraren op het gebied van de informatica op het programma:
– *Inleiding informatica*
Nascholing en bijscholing leraren exacte wetenschappen VWO in verband met de verwachte invoering van het vak informatica in het Voortgezet Onderwijs. De cursus bestaat uit 24 uur college en 40 uur practicum (ontwikkelen van programma's in PASCAL). Kosten ƒ25,–.
Inlichtingen/inschrijving: Vakgroep Informatica, Onderafdeling Wiskunde en Informatica, Technische Hogeschool, Julianalaan 132, 2628 BL Delft, tel. 015-78 59 53 of 015-78 45 71.
– *Inleiding programmeren en computergebruik*
Nascholing en bijscholing leraren exacte wetenschappen VWO in verband met de verwachte invoering van het vak informatica in het Voortgezet Onderwijs. De cursus bestaat uit colleges en praktische oefeningen (met behulp van de programmeertalen PASCAL en BASIC). Duur: 60 uur verspreid over 7 maanden. Kosten: ƒ50,–.
Inlichtingen/inschrijving: Subfaculteit Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit, De Boelelaan 1081, 1081 HV Amsterdam, tel. 020-5 48 24 10.
– *Informatica*
Doel van de cursus is de docenten die in het VWO informatica geven vertrouwd te maken met moderne ontwikkelingen in de informatica. De cursus vindt plaats op woendagmiddag en -avond, iedere cursusdag 2 × 45 minuten college en 3 uur praktische oefeningen. Kosten: ƒ25,–.
Inlichtingen/inschrijving: Vakgroep Informatica, Onderafdeling Wiskunde en Informatica, Technische Hogeschool Eindhoven, Postbus 513, 5600 MB Eindhoven, tel. 040-47 39 02.
– *Algoritmiek*
Basisinstructie op het gebied van de informatica voor leraren zonder veel voorkennis informatica. De cursus bestaat uit colleges en praktische oefeningen (met behulp van de onderwijsprogrammeertaal ELAN). Duur: 60 uur verspreid over 3 maanden. Kosten ƒ80,–.
Inlichtingen/inschrijving: Afdeling Informatica I, Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen, Toernooiveld 625, 6525 ED Nijmegen, tel. 080-55 88 33, tst. 22 58.
Aanmelding voor deze cursussen dient *vóór 1 juli 1983* te geschieden bij desbetreffend inschrijfadres.
Inlichtingen over het cursusprogramma als geheel: Commissie van voorbereiding PostAcademisch Onderwijs in de Informatica, Plantage Muidergracht 6, 1018 TV Amsterdam, tel. 020-5 22 20 86.

Tevens zijn er nascholingsprospecti bij de initiële opleidingen verschenen.

EUCLIDES

Inhoud van de 58ste jaargang 1982/1983

ARTIKELEN

KORRELS:

THEMANUMMER

BOEKBESPREKINGEN

DIVERSEN

De 58ste jaargang stond onder redactie van Mw I. van Breugel (vanaf maart) - Drs F. H. Dolmans (hoofdredacteur vanaf februari) - Dr F. Goffree - W. Kleijne - L. A. G. M. Muskens - W. P. de Porto (tot november) - P. E. de Roest (secretaris) - P. Th. Sanders - Mw H. S. Susijn-van Zaale (eindredactrice) - Dr P. G. J. Vredenduin (penningmeester) - B. Zwaneveld (hoofdredacteur tot februari).

Vakantiecursus
georganiseerd door de Stichting Mathematisch Centrum in Eindhoven op *19 en 20 augustus 1983* en Amsterdam op *25 en 26 augustus 1983*.
Thema: Complexe getallen.
Inlichtingen en aanmelding vóór 1 augustus, tel. 020-5 92 40 10, 40 11 en 40 75.

INHOUD

ADRESSEN VAN AUTEURS

Mw R. Aerts, Blauwbergsesteenweg 71, 3170 Herselt, België

L. A. D. de Boer, Sluiswaard 30, 1824 TK Alkmaar

F. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen

D. Kok, Voltaplein 45, 1098 NP Amsterdam

Mw C. Maurer-Crutzen, Lindeweg 49, 6367 CH Voerendaal

Ir H. Mulder, Geersbroekseweg 27, 4851 RD Ulvenhout

K. Post, T. H. Eindhoven, afd. Wiskunde en Informatica, postbus 513, Eindhoven